Министерство образования и науки РФ
Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»
Факультет физики, математики, информатики
Кафедра общей педагогики
КУРСОВАЯ РАБОТА
на тему:
«Инварианты кривых второго порядка»
Выполнил студент
Юлия Алексеевна Нагибина
Научный руководитель
канд. физ-мат. наук, доц. А.В. Забеглов
Таганрог
2019
ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
Кривые второго порядка окружают нас всюду, но мы об этом даже не задумываемся. Первыми открывателями кривых были древние греки, они их назвали «коническими сечениями». Им было посвящено множество научных трудов естествознания и точных наук. Но только в XVII - XVIII веках им нашли применение в баллистике и астрономии: так, например, пушечное ядро летит по траектории параболы, а орбиты планет имеют форму эллипса. Но уже в XX веке проведенные физические эксперименты показали, что частицы тоже двигаются по траекториям, являющимися кривыми второго порядка. К примеру, движение заряженной частицы в однородном электрическом поле происходит по параболе, а альфа-частицы в опыте Резерфорда движутся по гиперболам. И наконец, кривые имеют огромную практическую значимость, так как их геометрические свойства применяются во множестве конструкций и механизмов.
Цель данной курсовой работы - изучение инвариантов кривых второго порядка.
Объект исследования - инварианты кривых второго порядка.

Предмет исследования - преобразования поворота и параллельного переноса систем координат.

Задачи:

- изучить кривые второго порядка и уравнение в общем виде;
- изучить преобразования систем координат;
- изучить инварианты поворота и параллельного переноса систем координат;
- произвести классификацию кривых по инвариантам;
- привести примеры исследования уравнения кривой второго порядка.

В работе использовался теоретический метод исследования: изучение научной литературы по теме исследования, примерное решение уравнения кривой.

Практическая значимость данной курсовой работы заключается в определении инвариантов кривых второго порядка и применение их на практике.

1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Кривой второго порядка называется геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка с действительными коэффициентами.

где A, B, C, D, E, F -- действительные числа, A, B, C одновременно не равны нулю.

Уравнение (1) называется общим уравнением кривой второго порядка [1,2].

Преобразование систем координат

Преобразование координат -- замена системы координат на плоскости, в пространстве или, в самом общем случае, на заданном n-мерном многообразии.

В результате преобразования систем координат изменяется вид уравнения, но остаются неизменными некоторые параметры, входящие в это уравнение, что позволяет определить инварианты кривой. Все возможные преобразования системы координат на плоскости сводятся к параллельному переносу и повороту осей координат.

1. Параллельный перенос системы координат.

Перенос системы координат -- преобразование, при котором ее начало переносится в другую точку с сохранением направления осей исходной системы координат.Рисунок 1. Параллельный перенос системы координат

Имеем прямоугольную систему координат XOY с центром в точке O(0; 0) Через некоторую точку O'(x0; y0) проведем новые оси координат параллельные OX, OY, сохранив направление и масштаб. Координаты произвольной точки M(x, y) в новой системе координат X'OY' примут значения M(x'; y'), выражающиеся формулой (2), а значения в системе XOY формулой (3).

2. Поворот системы координат.

Поворот системы координат -- преобразование XOY>X'OY', при котором оси исходной системы XOY поворачиваются вокруг начала координат на некоторый угол б.

Рисунок 2. Поворот системы координат

Угол поворота отсчитывается по оси OX в направлении против часовой стрелки. Координаты точки M в системе X'OY', повернутой относительно системы XOY на угол

б, даются соотношениями
Эти формулы описывают преобразование поворота системы координат XOY> X'OY' на угол б. Обратное преобразование X'OY'> XOY представляет собой поворот системы X'OY' в противоположном направлении на тот же угол, т.е. на угол -б и описывается формулами [3,15].
Преобразование (4) в матричных обозначениях имеет вид
где и - координаты точки М в системе XOY и X'OY' соответственно
- матрица вращения плоскости, которая описывается формулой (7)
Матрица вращения ортогональна и удовлетворяет соотношениям
2. ИНВАРИАНТЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ
2.1 Инварианты поворота систем координат
Для дальнейшего удобства будет рассматривать уравнение общего вида кривой второго порядка в следующем виде:
Форма уравнения (9) поможет нам определить инварианты составленных из коэффициентов уравнения aij и не изменяющихся при преобразованиях системы координат.
Инвариант (неизменный) - выражение, составленное из коэффициентов уравнения кривой, которое не меняется при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой такой же системе, т. е. при поворотах осей координат и при параллельных переносах осей [2].
Введем построенную из коэффициентов уравнения (9) симметричную матрицу A=AT (10), а также вектор-столбец, описывающий точки (x,y)
Затем рассмотрим уравнение (12), представляющее собой матричную форму уравнения общего вида кривой второго порядка.
Преобразование поворота системы координат в плоскости (x,y) описывается ортогональной матрицей вращения
инварианта кривая второй порядок
Теорема 1. Определитель матрицы уравнения кривой второго порядка инвариантен относительно поворотов системы координат.
Доказательство:
В новой системе координат , обратное преобразование имеет вид . Подставим последнее равенство в уравнение (12):
или
Таким образом, в повернутой системе координат уравнение кривой задается матрицей :
Вычислим ее определитель:
Так как матрица вращения ортогональна, то , тогда получаем, что
Теорема 1 доказана.
Теорема 2. Определитель матрицы , являющейся блоком матрицы A уравнения кривой второго порядка инвариантен относительно поворотов системы координат.
Доказательство:
Рассмотрим умножение матриц , подробно выглядит так
Непосредственным умножением матриц нетрудно проверить, что

Таким образом, при умножении получается матрица , в которой блок представляет собой произведение блоков и матриц и соответственно.
Т.е. из (15) следует
Так как матрица ортогональна, то аналогично (16) и (17) получим:
Теорема 2 доказана.
Теорема 3. След инвариантен относительно поворотов системы координат.
Доказательство:
При доказательстве теоремы 3, для упрощения записи формул, введем , тогда элемент матрицы из (20) согласно правилу умножения матриц равен:
Вычислим сумму диагональных элементов матрицы :
Вынесем общий множитель alm, т.е. выполним сначала суммирование по i, а затем по l, m:
Переставляем местами сомножители под знаком внутренней суммы (по i) и по свойству ортогональности матрицы rT=r -1:
Учитываем, что r -1*r=E, а символ Кронекера определяется соотношениями
.
Тогда при подстановке (25) в (24) получим:
или
Теорема 3 доказана.
Теорема 4. Величина инвариантна относительно поворотов системы координат.
Доказательство:
Вычислим величину B в новой системе координат докажем теорему 3:
(28)
Имеем:
Подставив сюда
Путем некоторых преобразований получаем:
Или
Теорема 4 доказана.
2.2 Инварианты поворота систем координат
Запишем формулу (3) в следующем виде:
Где V - точки плоскости в исходной системе координат (11)
V' - точки плоскости в перенесенной системе координат (33)
V0 - точки переноса системы координат (34)
Тогда уравнение кривой второго порядка в матричной форме в параллельной системе координат, будет иметь вид
Матрица Аперенос имеет вид
где элементы правого столбца и нижней строки даются выражениями:
Исходя из этого, сформулируем теорему 5.
Теорема 5. Величины инвариантны относительно преобразований параллельного переноса системы координат.
Доказательство:
Вычислим определитель матрицы Аперенос через разложение по элементам третьего столбца (36):

Подставим сюда значения элементов из (37), после некоторых алгебраических преобразований с учетом симметрии матрицы А получим:
Легко убедиться, что правая часть равенства совпадает с определителем det A матрицы уравнения в исходной системе координат, т.е.
В результате параллельного переноса матрица А преобразуется в матрицу Аперенос, в которой блок не изменяется. Соответственно неизменны, а значит, являются инвариантами относительно преобразования параллельного переноса координат.
Теорема 5 доказана [4,20].
2.3 Классификация кривых по инвариантам. Исследование уравнения кривой второго порядка
Инварианты позволяют классифицировать кривые второго порядка, с помощью которых можно выяснить тип кривой по заданным коэффициентам уравнения общего вида.
Обычно классификация кривых задается двумя основными величинами.
Первая величина - . Этот параметр определяет “истинность” кривой второго порядка. Если , то эта кривая невырожденная - эллипс, гипербола, парабола. Если , то данная кривая является некоторым случаем кривой.
Вторая величина - D. Этот параметр определяет симметрию кривой второго порядка. Если D 0, то эта кривая центральная, т.е. имеет центр симметрии, в противном случае, кривая является нецентральной [4,30].
Таблица 1. Невырожденные кривые,

D

Название кривой

D ?0,
центральная кривая

D>0

Действительный эллипс

Мнимый эллипс, нет ни одной точки на плоскости

D<0

Гипербола

D=0, нецентральная кривая

Парабола

Таблица 2. Вырожденные кривые,

D

В

Название кривой

,
центральная кривая

D>0

Точка, вырожденный эллипс

D<0

Пара пересекающихся прямых, вырожденная гипербола

D=0, нецентральная кривая

В>0

Пара мнимых прямых, нет ни одной точки на плоскости

$B<0$

Пара параллельных прямых

$B=0$

Прямая, две слившихся параллельных прямых

Исследование уравнения кривой второго порядка
Задача. Определить тип кривой второго порядка, описываемой уравнением общего вида:
Пример 1.
Решение:
Выпишем коэффициенты заданного уравнения:
.
Запишем симметричную матрицу:
.
Вычислим первый инвариант кривой
Так как , то данное уравнение описывает невырожденную кривую.
Второй инвариант кривой
Так как , то данное уравнение описывает центральную кривую второго порядка.
В связи с тем, что $D>0$, находим третий инвариант
.
По совокупности признаков , $D>0$, и согласно таблице 1 заданное уравнение описывает невырожденную кривую - мнимый эллипс.
Рисунок 3. Мнимый эллипс
Пример 2.

Решение:
Выпишем коэффициенты заданного уравнения:
.
Запишем симметричную матрицу:
.
Вычислим первый инвариант кривой
Так как , то заданное уравнение описывает вырожденную кривую.
Второй инвариант кривой
Так как , то заданное уравнение описывает нецентральную кривую второго порядка
В связи с тем, что , , то согласно таблице 2 находим третий инвариант
По совокупности признаков , D=0, и согласно таблице 2 заданное уравнение описывает вырожденную кривую - пару параллельных прямых.
Рисунок 4. Пара параллельных кривых

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе курсовой работы были изучены определения кривой второго порядка и уравнение в общем виде, а также рассмотрели преобразования систем координат, которые, с помощью матричных уравнений, позволяют найти неизменные параметры кривых.
Затем было доказано, что при повороте системы координат кривая второго порядка имеет 4 инварианта - , а при параллельном переносе 3 инварианта -
Также во второй главе данной работы были приведены таблицы классификации кривых по инвариантам и примеры решения уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Раздел 3. Кривые и поверхности 2-го порядка. Курс лекций и образец решения индивидуального задания по высшей математике для бакалавров 1-го курса очной формы обучения. - Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2011. - 18 с.
2. Параграф 2. Инварианты кривых второго порядка. - URL: http://stu.scask.ru/book_alin.php?id=54 (дата обращения 17.04.2019)
3. Соболев А.Б., Вигура М.А., Рыбалко А.Ф., Рыбалко Н.М.. V. Аналитическая геометрия на плоскости. поверхности второго порядка: Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 76 с.
4. Фомина Т.К., Сафин М.Я. - Методическое пособие по изучению раздела математики «Кривые второго порядка». М., издательство РУДН, 2004 - 94с.