Тесты кафедры анатомии человека МГМСУ им. А.И. Евдокимова

Ростовский государственный экономический
Университет (РИНХ)

Реферат на тему: Математический анализ в экономике
Выполнил:
Студент гр. ЭК-418 Сдобин Кирилл Олегович
Ростов-на-Дону 2016

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. При построении экономических моделей выявляются существенные факторы и отбрасываются детали несущественные для решения поставленной задачи.
К экономическим моделям могут относится модели:
§ экономического роста
§ потребительского выбора
§ равновесия на финансовом и товарном рынке и многие другие.
Модель -- это логическое или математическое описание компонентов и функций, отражающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса.
Модель используется как условный образ, сконструированный для упрощения исследования объекта или процесса.
Природа моделей может быть различна. Модели подразделяются на: вещественные, знаковые, словесное и табличное описание и др.
Экономико-математическая модель

В управлении хозяйственными процессами наибольшее значение имеют прежде всего экономико-математические модели, часто объединяемые в системы моделей.
Экономико-математическая модель (ЭММ) -- это математическое описание экономического объекта или процесса с целью их исследования и управления ими.
Это математическая запись решаемой экономической задачи.
Основные типы моделей
§ Экстраполяционные модели
§ Факторные эконометрические модели
§ Оптимизационные модели
§ Балансовые модели, модель МежОтраслевогоБаланса (МОБ)
§ Экспертные оценки
§ Теория игр
§ Сетевые модели
§ Модели систем массового обслуживания

Экономико-математические модели и методы, применяемые в экономическом анализе

В настоящие время в анализе хозяйственной деятельности организаций все большее применение находят математические методы исследования. Это способствует совершенствованию экономического анализа, его углублению и повышению его действенности.
В результате использования математических методов достигается более полное изучение влияния отдельных факторов на обобщающие экономические показатели деятельности организаций, уменьшение сроков осуществления анализа, повышается точность осуществления экономических расчетов, решаются многомерные аналитические задачи, которые не могут быть выполнены традиционными методами. В процессе использования экономико-математических методов в экономическом анализе осуществляется построение и изучение экономико-математических моделей, описывающих влияние отдельных факторов на обобщающие экономические показатели деятельности организаций.
Различают четыре основных вида экономико-математических моделей, используемых при анализе влияния отдельных факторов:
§ аддитивные модели;
§ мультипликативные модели;
§ кратные модели;
§ смешанные модели.
Аддитивные модели могут быть определены как алгебраическая сумма отдельных показателей. Такие модели могут быть охарактеризованы с помощью следующей формулы:
Примером аддитивной модели является баланс товарной продукции.
Мультипликативные модели могут быть определены как произведение отдельных факторов.
Одним из примеров подобной модели может быть двухфакторная модель, выражающая зависимость между объемом выпуска продукции, количеством единиц используемого оборудования и выработкой продукции в расчете на одну единицу оборудования:
П = К В,
§ П -- объем выпуска продукции;
§ К -- количество единиц оборудования;
§ В -- выработка продукции на единицу оборудования.
Кратные модели -- это соотношение отдельных факторов. Они характеризуются такой формулой:
ОП = x/y

Здесь ОП представляет собой обобщающий экономический показатель, который находится под влиянием отдельных факторов x и y. Примером кратной модели может служить формула, выражающая зависимость между продолжительностью оборота оборотных активов в днях, средней величиной этих активов за данный период и однодневным объемом продаж:

П = ОА/ОП,

§ П -- продолжительность оборота;

§ ОА -- средняя величина оборотных активов;

§ ОП -- однодневный объем продаж.

Наконец, смешанные модели -- это сочетание уже рассмотренных нами видов моделей. Так, например, такой моделью может быть описан показатель рентабельности активов, на уровень которого влияют три фактора: чистая прибыль (ЧП), величина внеоборотных активов (ВА), величина оборотных активов (ОА):

Ra = ЧП / ВА + ОА,

В обобщенном виде смешанная модель может быть представлена такой формулой:

Итак, вначале следует построить экономико-математическую модель, описывающую влияние отдельных факторов на обобщающие экономические показатели деятельности организации. Большое распространение в анализе хозяйственной деятельности получили многофакторные мультипликативные модели, так как они позволяют изучить влияние значительного количества факторов на обобщающие показатели и тем самым достичь большей глубины и точности анализа.

После этого нужно выбрать способ решения этой модели. Традиционные способы: способ цепных подстановок, способы абсолютных и относительных разниц, балансовый способ, индексный метод, а также методы корреляционно-регрессионного, кластерного, дисперсионного анализа, и др. Наряду с этими способами и методами в экономическом анализе используются и специфически математические способы и методы.

Интегральный метод экономического анализа

Одним из таких способов (методов) является интегральный. Он находит применение при определении влияния отдельных факторов с использованием мультипликативных, кратных, и смешанных (кратно-аддитивных) моделей.

В условиях применения интегрального метода имеется возможность получения более обоснованных результатов исчисления влияния отдельных факторов, чем при использовании метода цепных подстановок и его вариантов. Метод цепных подстановок и его варианты, а также индексный метод имеют существенные недостатки: 1) результаты расчетов влияния факторов зависят от принятой последовательности замены базисных величин отдельных факторов на фактические; 2) дополнительный прирост обобщающего показателя, вызванный взаимодействием факторов, в виде неразложимого остатка присоединяется к сумме влияния последнего фактора. При использовании же интегрального метода этот прирост делится поровну между всеми факторами.

Интегральный метод устанавливает общий подход к решению моделей различных видов, причем независимо от числа элементов, которые входят в данную модель, а также независимо от формы связи между этими элементами.

Интегральный метод факторного экономического анализа имеет в своей основе суммирование приращений функции, определенной как частная производная, умноженная на приращение аргумента на бесконечно малых промежутках.
В процессе применения интегрального метода необходимо соблюдение нескольких условий. Во-первых, должно соблюдаться условие непрерывной дифференцируемости функции, где в качестве аргумента берется какой-либо экономический показатель. Во-вторых, функция между начальной и конечной точками элементарного периода должна изменяться по прямой Ге. Наконец, в третьих, должно иметь место постоянство соотношения скоростей изменения величин факторов
dy / dx = const

При использовании интегрального метода исчисление определенного интеграла по заданной подынтегральной функции и заданному интервалу интегрирования осуществляется по имеющейся стандартной программе с применением современных средств вычислительной техники.
Если мы осуществляем решение мультипликативной модели, то для расчета влияния отдельных факторов на обобщающий экономический показатель можно использовать следующие формулы:
Z=xy;
ДZ(x) = y0 *Дх + 1/2Дх *Ду
Z(y)=x0 * Ду +1/2Дх * Ду

При решении кратной модели для расчета влияния факторов воспользуемся такими формулами:
Z=x /y;
ДZ(x) = Дх/Ду Ln y1/y0
ДZ(y)=ДZ - ДZ(x)

Существует два основных типа задач, решаемых при помощи интегрального метода: статический и динамический. При первом типе отсутствует информация об изменении анализируемых факторов в течение данного периода. Примерами таких задач могут служить анализ выполнения бизнес-планов либо анализ изменения экономических показателей по сравнению с предыдущим периодом. Динамический тип задач имеет место в условиях наличия информации об изменении анализируемых факторов в течение данного периода. К этому типу задач относятся вычисления, связанные с изучением временных рядов экономических показателей.
Таковы важнейшие черты интегрального метода факторного экономического анализа.
Метод логарифмирования

Кроме этого метода, в анализе находит применение также метод (способ) логарифмирования. Он используется при проведении факторного анализа, когда

решаются мультипликативные модели. Сущность рассматриваемого метода заключается в том, что при его использовании имеет место логарифмически пропорциональное распределение величины совместного действия факторов между последними, то есть эта величина распределяется между факторами пропорционально доле влияния каждого отдельного фактора на сумму обобщающего показателя. При интегральном же методе упомянутая величина распределяется между факторами в одинаковой мере. Поэтому метод логарифмирования делает расчеты влияния факторов более обоснованными по сравнению с интегральным методом.
В процессе логарифмирования находят применение не абсолютные величины прироста экономических показателей, как это имеет место при интегральном методе, а относительные, то есть индексы изменения этих показателей. К примеру, обобщающий экономический показатель определяется в виде произведения трех факторов -- сомножителей f = x y z.
Найдем влияние каждого из этих факторов на обобщающий экономический показатель. Так, влияние первого фактора может быть определено по следующей формуле:
Дfx = Дf · lg(x1 / x0) / lg(f1 / f0)

Каким же было влияние следующего фактора? Для нахождения его влияния воспользуемся следующей формулой:
Дfy = Дf · lg(y1 / y0) / lg(f1 / f0)

Наконец, для того, чтобы исчислить влияние третьего фактора, применим формулу:
Дfz = Дf ·lg(z1 / z0)/ lg(f1 / f0)

Таким образом, общая сумма изменения обобщающего показателя расчленяется между отдельными факторами в соответствии с пропорциями отношений логарифмов отдельных факторных индексов к логарифму обобщающего показателя.
При применении рассматриваемого метода могут быть использованы любые виды логарифмов -- как натуральные, так и десятичные.
Метод дифференциального исчисления

При проведении факторного анализа находит применение также метод дифференциального исчисления. Последний предполагает, что общее изменение функции, то есть обобщающего показателя, подразделяется на отдельные слагаемые, значение каждого из которых исчисляется как произведение определенной частной производной на приращение переменной, по которой определена эта производная.
Определим влияние отдельных факторов на обобщающий показатель, используя в качестве примера функцию от двух переменных.
Задана функция Z = f(x,y). Если эта функция является дифференцируемой, то ее изменение может быть выражено следующей формулой:
Поясним отдельные элементы этой формулы:

ДZ = (Z1 - Z0) - величина изменения функции;
Дх = (х1 - х0) -- величина изменения одного фактора;
Ду = (у1 - у0) -величина изменения другого фактора;
- бесконечно малая величина более высокого порядка, чем
В данном примере влияние отдельных факторов х и у на изменение функции Z (обобщающего показателя) исчисляется следующим образом:
ДZх = дZ / дх · Дх; ДZу = дZ / ду · Ду.

Сумма влияния обоих этих факторов -- это главная, линейная относительно приращения данного фактора часть приращения дифференцируемой функции, то есть обобщающего показателя.
Способ долевого участия

В условиях решения аддитивных, а также кратно-аддитивных моделей для исчисления влияния отдельных факторов на изменение обобщающего показателя используется также способ долевого участия. Его сущность состоит в том, что вначале определяется доля каждого фактора в общей сумме их изменений. Затем эта доля умножается на общую величину изменения обобщающего показателя.
Предположим, что мы определяем влияние трех факторов -- а,b и с на обобщающий показатель у. Тогда для фактора, а определение его доли и умножение ее на общую величину изменения обобщающего показателя можно осуществить по следующей формуле:
Дуа = Да/Да + Дb + Дс*Ду

Для фактора в рассматриваемая формула будет иметь следующий вид:
Дуb =Дb/Да + Дb +Дс*Ду

Наконец, для фактора с имеем:
Дус =Дс/Да +Дb +Дс*Ду

Такова сущность способа долевого участия, используемого для целей факторного анализа.

Теория игр

Находит применение также теория игр. Так же, как и теория массового обслуживания, теория игр представляет собой один из разделов прикладной математики. Теория игр изучает оптимальные варианты решений, возможные в ситуациях игрового характера. Сюда относятся такие ситуации, которые связаны с выбором оптимальных управленческих решений, с выбором наиболее целесообразных вариантов взаимоотношений с другими организациями, и т.п.
Для решения подобных задач в теории игр используются алгебраические методы, которые базируются на системе линейных уравнений и неравенств, итерационные

методы, а также методы сведения данной задачи к определенной системе дифференциальных уравнений.
Одним из экономико-математических методов, применяемых в анализе хозяйственной деятельности организаций, является так называемый анализ чувствительности. Данный метод зачастую применяется в процессе анализа инвестиционных проектов, а также в целях прогнозирования суммы прибыли, остающейся в распоряжении данной организации.
В целях оптимального планирования и прогнозирования деятельности организации необходимо заранее предусматривать те изменения, которые в будущем могут произойти с анализируемыми экономическими показателями.
Например, следует заранее прогнозировать изменение величин тех факторов, которые влияют на размер прибыли: уровень покупных цен на приобретаемые материальные ресурсы, уровень продажных цен на продукцию данной организации, изменение спроса покупателей на эту продукцию.
Анализ чувствительности состоит в определении будущего значения обобщающего экономического показателя при условии, что величина одного или нескольких факторов, оказывающих влияние на этот показатель, изменится.
Так, например, устанавливают, на какую величину изменится прибыль в перспективе при условии изменения количества продаваемой продукции на единицу. Этим самым мы анализируем чувствительность чистой прибыли к изменению одного из факторов, влияющих на нее, то есть в данном случае фактора объема продаж. Остальные же факторы, влияющие на величину прибыли, являются при этом неизменными. Можно определить величину прибыли также и при одновременном изменении в будущем влияния нескольких факторов. Таким образом анализ чувствительности дает возможность установить силу реагирования обобщающего экономического показателя на изменение отдельных факторов, оказывающих влияние на этот показатель.
Матричный метод

Наряду с вышеизложенными экономико-математическими методами в анализе хозяйственной деятельности находят применение также матричные методы. Эти методы базируются на линейной и векторно-матричной алгебре.
Экстраполяционный анализ

Кроме рассмотренных методов, используется также экстраполяционный анализ. Он включает в себя рассмотрение изменений состояния анализируемой системы и экстраполяцию, то есть продление имеющихся характеристик этой системы на будущие периоды. В процессе осуществления этого вида анализа можно выделить такие основные этапы: первичная обработка и преобразование исходного ряда имеющихся данных; выбор типа эмпирических функций; определение основных параметров этих функций; экстраполяция; установление степени достоверности проведенного анализа.
В экономическом анализе используется также метод главных компонент. Они

применяется в целях сравнительного анализа отдельных составных частей, то есть параметров проведенного анализа деятельности организации. Главные компоненты представляют собой важнейшие характеристики линейных комбинаций составных частей, то есть параметров проведенного анализа, которые имеют самые значительные величины дисперсии, а именно, наибольшие абсолютные отклонения от средних величин.

экономический математический модель интегральный

Применения производной в экономических расчетах

Современный экономист должен хорошо владеть количественными методами анализа. К такому выводу нетрудно прийти практически с самого начала изучения экономической теории. При этом важны как знания традиционных математических курсов (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей), так и знания, необходимые непосредственно в практической экономике и экономических исследованиях (математическая и экономическая статистика, теория игр, эконометрика и др.).

Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем.

Ф.Энгельс в своё время заметил, что "лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение". Поэтому целью моей работы является выяснить, каков экономический смысл производной, какие новые возможности для экономических исследований открывает дифференциальное исчисление, а также исследовать применение производной при решении различных видов задач по экономической теории.

Использование производной при решении задач по экономической теории

Задача №1: Функция спроса имеет вид QD=100 - 20p, постоянные издержки TFC (total fixed costs) составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC (total variable costs) на производство единицы продукции - 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

Решение: Прибыль есть выручка минус издержки:

П=TR - TC,

где TR=p*Q; TC=TFC+TVC.

Найдём цену единицы продукции:

20p=100 - Q p=5 - Q/20.

Тогда

П=(5 - Q/20)Q - (50 + 2Q)= - Q2 + 60Q - 1000 ? max

Найдём производную: П'(Q)= -2Q+60.

Приравняем производную к нулю: -2Q+60=0 Q=30.

При переходе через точку Q=30 функция П(Q) меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Задача №2: Объём спроса на продукцию предприятия выражается формулой: QD=200 - 4p, а объём предложения - QS=6p - 100. Величина переменных издержек на единицу продукции TVC=25. Чему должна быть равна цена на единицу продукции p, чтобы прибыль П была максимальной?
Решение: В точке потребительского равновесия QS=QD, то есть
6p0 - 100=200 - 4p0,
откуда p0= 30 (ден.ед.) - равновесная цена, ? Q0=80 (ед.) - равновесный объём продукции.
Изобразим графически кривые спроса и предложения, а также точку потребительского равновесия, находящуюся на их пересечении (см. рис. 2).
Рассмотрим три возможных варианта:
1) p>p0, ? Q=QD, то есть П=QDp - QD TVC=QD(p - TVC),
подставим значения и получим:
П=(200 - 4p)*(p - 25)= -4p2 + 300p - 5000.
2) p=p0, ? Q=QD=QS, ? Qпродажи=Q0=80 (ед.), ?
П2=80*(30 - 25)=400 (ден. ед.).
3) p<p0: ? Q= QS, то есть П=QSp - QS TVC=QS(p - TVC),
подставим значения:
П=(6p - 100)(p - 25)=6p2 - 250p + 2500.
Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала её значений или как-либо иначе, но гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:
1) П= - 4p2 + 300p - 5000
П'= - 8p + 300;
- 8p + 300=0 ? p=75/2=37,5 (ден. ед.).
Значит, Q=QD=200 - 4*37,5=200 - 150=50 (ед.), а
П1= - 4p2 + 300p - 5000= - 4*(37,5)2+300*37,5 - 5000=625 (ден. ед.).
2) Во втором случае прибыль была уже найдена: П2=400 (ден. ед.).
3) П=6p2 - 250p + 2500
П'=12p - 250;
12p - 250=0 ? p=125/6=205/6 (ден. ед.).
Значит, Q=QS=6*205/6 - 100=125 - 100=25 (ед.), а
П3=6p2 - 250p + 2500=6*(205/6)2 - 250*205/6+2500= - 1041/6 (ден. ед.).
Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться 37,5 денежным единицам.
Задача №3: Какова максимальная выручка монополиста, если спрос вплоть до пересечения с осями описывается линейной функцией Q=b - ap, где p - цена товара, выпускаемого монополистом; a и b - коэффициенты функции спроса?
Решение: Выручка TR=Qp=p(b - ap) достигнет максимума при равенстве нулю производной по цене:
TR'=(p(b - ap))'=0.
TR'=p'*(b - ap)+ (b - ap)'*p=b - ap - ap=b - 2ap=0 ? p= ?
? Q=b - ap=b - a=.

При этом максимум выручки составит
Задача №4: Найти оптимальный объём производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом: П(q)=TR(q) - TC(q)=q2 - 8q + 10.
Решение: Найдём производную данной функции:
П
Приравняем производную к нулю и найдём точку экстремума:
П
Является ли объём выпуска, равный четырём единицам продукции, оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать характер изменения знака производной при переходе через точку экстремума.
При П и прибыль убывает.
При П и прибыль возрастает.
Как видим, при переходе через точку экстремума производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке экстремума прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объём производства не является оптимальным для фирмы.
Каким же всё-таки будет оптимальный объём выпуска для данной фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных возможностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции (П(q=8)=П(q=0)=10), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных возможностей.
Задача №5: Найти объём производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если p=15, TC(q)=q3 + 3q.
Решение: Прибыль фирмы, действующей на рынке совершенной конкуренции, максимизируется при равенстве предельной выручки и предельных издержек: MR=MC. Поскольку при совершенной конкуренции наблюдается равенство цены и предельной выручки: P=MR, то можно утверждать, что фирма максимизирует прибыль при P=MC.
Найдём предельные издержки: MC=TC'=3q2 + 3.
3q2 + 3=15;
3q2=12 ? q=2.
Итак, мы выяснили, что при цене p=15 фирма предложит на продажу 2 единицы продукции.
Задача №6: Пусть - издержки фирмы-монополиста, QD(p)=40 - 2p - функция спроса. Найти оптимальный для данной монополии объём производства и соответствующую цену единицы продукции.
Решение: Выразим зависимость цены от количества произведённой продукции:
Тогда прибыль будет равна:
В точке q0 максимума прибыли выполняется равенство Отсюда оптимальный для

монополиста объём производства равен q0=10. Соответствующая цена будет:
p0=p(q0)=
При этом предельные издержки Таким образом, цена, наиболее выгодная для данной монополии, в полтора раза выше её предельных издержек.
Задача №7: Объём продукции u цеха в течение рабочего дня представляет функцию где t - время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.
Решение: За период времени от t0=2 до (t0 + ?t) количество произведенной продукции изменится от u0=u(t0) до значения u0+?u = u(t0+?t). Средняя производительность труда за этот период времени составит ?u/?t. Следовательно, производительность труда в момент t0 можно определить, как предельное значение средней производительности труда за период времени от t0 до (t0+?t) при ?t?0, то есть
u'(t)=
Итак, производительность труда в момент времени через 2 часа после начала работы составит 43 единицы продукции в час.
Заключение
В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:
1. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.
2. При помощи производной можно значительно расширить круг рассматриваемых при решении задач функций.
3. Экономический смысл производной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора.
4. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).
5. Производная находит широкое приложение в экономической теории. Многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем (например, представляет интерес экономическая интерпретация теоремы Ферма, выпуклости функции и т. д.).
6. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории.
Словарь экономических терминов
Производственные возможности фирмы - совокупность факторов производства, которыми располагает фирма и имеющийся уровень технологии их использования.
Факторы производства - то, что участвует в процессе производства и способствует созданию конечного продукта (товара или услуги): труд, земля, капитал, предпринимательская способность.
Спрос - количество товаров и услуг, которое желает и имеет возможность приобрести

потребитель по каждой конкретной цене.
Предложение - количество товаров и услуг, которое желает и имеет возможность предложить производитель по каждой конкретной цене.
Монополия - специфический вид конкуренции, при котором на рынке присутствует единственный продавец, производящий специфический, не имеющий близких заменителей продукт и может оказывать значительное влияние на рыночную цену. Единственной границей установления цены является платежеспособный спрос и цена на мировом рынке.
Совершенная конкуренция - вид конкуренции, при котором на рынке действует множество продавцов и покупателей, доля каждого из которых на рынке незначительна. Производится однородная продукция и отсутствует возможность влияния на рыночную цену (она устанавливается путём взаимодействия спроса и предложения).
Постоянные издержки - TFC (total fixed costs) - затраты, которые не изменяются при изменении объёма производства: амортизация, арендная плата, зарплата управленческого персонала, коммунальные услуги (не связанные с объёмом производства) и т.д.
Переменные издержки - TVC (total variable costs) - затраты, которые изменяются при изменении объёма производства: затраты на сырьё, материалы и топливо, зарплата рабочих, коммунальные услуги (связанные с объёмом производства) и т.д.
Благо - это предмет, явление, продукт труда, удовлетворяющий определённую человеческую потребность и отвечающий интересам, целям, устремлениям людей.
Товар - специфическое экономическое благо, произведённое для обмена.
Услуги - целесообразная деятельность человека, результат которой имеет полезный эффект, удовлетворяющий какие-либо потребности человека. Специфика услуг как товара состоит в том, что потребительная стоимость услуги не имеет вещественной формы, также услугу нельзя накопить, она может быть потреблена в момент производства.
Использование интегралов в экономических расчетах

Пример. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией
$f(t) = 3/(3t +1) + 4$.
Решение. Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от $t1$ до $t2$ будет выражаться формулой
$V =$.
В нашем случае
$V = = \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln 10/7 + 4$.
Пример. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 2t + 5$.
Решение. Имеем:
$V =$.

Пример. Пусть сила роста (см.6.1) описывается некоторой непрерывной функцией времени ? t = f(t), тогда наращенная сумма находится как
S = P exp ? t dt,
а современная величина платежа P = S exp(- ? t dt).
Если, в частности, ? t является линейной функцией времени:? t = ? o + at, где ? o - величина силы роста для t = 0, a - годовой прирост, то
? t dt = (? o + at)dt = ? o n + an2/2;
множитель наращения exp(? o n + an2/2). Если сила роста изменяется по геометрической прогрессии ? t = ? o at, где ? o - начальное значение процентной ставки, a - годовой коэффициент роста, тогда
? t dt = ? o at dt = ? o at /lna = ? o(an -1)/lna;
множитель наращения exp(? o(an -1) / lna).
Предположим, что начальный уровень силы роста равен 8%, процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% (a=1,2), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит exp(0,08 (1,25-1) / ln1,2) ?? exp 0,653953 ? 1,921397.
Пример. Выше при анализе непрерывных потоков платежей предполагалось, что годовая сумма ренты R равномерно распределяется на протяжении года. На практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток может существенно изменяться во времени, следуя какому-либо закону. Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функциейR t = f (t), то общая сумма поступлений за время n равна .
В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до n сумма составит:
S = .
Современная величина такого потока равна
A = .
Пусть функция потока платежей является линейной: Rt = Ro + at, гдеRo - начальная величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты. Вычислим современную величину A, пользуясь правилами интегрирования определенного интеграла:
A = = + .
Обозначим A1 = , A2 = .
Имеем: A1 = = - Ro/???= - Ro/?(-eo) = - Ro/?(-1) = Ro(-1)/?. A2 = .
Вычислим неопределенный интеграл
 по частям: u = t, dv = dt ? du = dt, v = = - /?, тогда = - t/? + 1/? = - t/? (t+1/?) +C.
Следовательно,
A2 = -a t/? (t+1/?)= ((1-)/? - n)a/?.
Итак, исходный интеграл
A = A1 + A2 = Ro(-1)/? + ((1-)/? - n)a/?.
Применение рядов в экономике
В настоящем разделе мы рассмотрим две задачи, касающиеся последовательностей и рядов, применительно к экономическим задачам.Пусть имеется вклад (рублей) в банке. По прошествии определенного промежутка времени банк начисляет

проценты. Обозначим через количество процентов, начисляемых за год. Обычно про такую процентную ставку говорят, что она % годовых. Если промежуток времени, за который начисляются проценты, меньше, чем год, например от года, то за этот промежуток времени банк начислит %. Например, может быть ежеквартальное начисление процентов, тогда за каждый квартал будет начислено %. Иногда применяют ежемесячное начисление процентов. В этом случае за каждый месяц банк будет начислять %. В принципе, возможна и ситуация с ежедневным начислением %.Возможны различные ситуации начисления процентов:

· с капитализацией (когда проценты прибавляются к основному вкладу и тоже участвуют в начислении процентов в последующие временные промежутки),

· без капитализации (проценты переводятся на отдельный беспроцентный счет или выплачиваются вкладчику, так что основной вклад остается неизменным).

Рассмотрим вначале второй случай. Пусть вклад находится временных промежутков, за каждый из которых банк начисляет %, при ставке % годовых. После первого промежутка банк начислит рублей (множитель 100 взялся из-за перевода процентов в доли от единицы, то есть 10% соответствует 0.1 доле), после второго еще и так далее. Спустя временных промежутков к основному вкладу рублей дополнительно можно получить рублей. Если вклад хранится лет, то и сумма вклада и процентов за этот срок составит рублей.Рассмотрим теперь ситуацию с капитализацией процентов к основному вкладу. В этом случае за первый временной промежуток к вкладу будет добавлено рублей, что в итоге составит общую сумму . Другими словами, вклад увеличится в раз. То же самое произойдет после второго, третьего и последующих временных промежутков. Через временных промежутков сумма вклада составит , а через лет . Такой способ начисления процентов обычно называют начисление сложных процентов. В качестве можно брать единицу при ежегодной капитализации, 4 -- при ежеквартальной, 12 -- при ежемесячной, 365 -- при ежедневной. В принципе, можно поставить задачу о непрерывном начислении процентов, то есть когда . В этом случае мы приходим к необходимости вычисления предела последовательности . Заменой он сводится к пределу:.И хотя непрерывный способ начисления процентов, как правило, не применяется в банках, тем не менее может оказаться полезным в ряде задач при анализе долгосрочных прогнозов. Возьмем годовых, срок вклада , начальная сумма . В таблице приведена сумма вклада при различных способах начисления процентов (без капитализации / с капитализацией) и различных периодах выплаты процентов (ежегодно, ежеквартально, ежемесячно, ежедневно и непрерывное начисление).

n=1

n=4

n=12

n=365

n=?

Без капитализации

1.1 ден. ед.

1.1 ден. ед.

1.1 ден. ед.

1.1 ден. ед.

1.1 ден. ед.

С капитализацией

1.1 ден. ед.

1.10381 ден. ед.

1.10471 ден. ед.

1.10516 ден. ед.

1.10517 ден. ед.

Пример 1.Начальный размер вклада под 10% годовых в банке составил 1 млн рублей. Найти размер вклада через 5 лет:
а) без капитализации процентов,б) с ежегодной капитализацией,в) с ежеквартальной капитализацией,г) с ежемесячной капитализацией,д) с ежедневной капитализацией,е) с непрерывной капитализацией.
Решение.
а) б) в) г) д) е)
Другая задача -- это вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом, например, 1000 рублей и 5% купоном. Это означает, что каждый год ее владелец будет получать 50 рублей дохода с одной облигации. Здесь используется ситуация начисления процентов без капитализации, рассмотренная выше. Однако пусть имеется инфляция 2% в год, которая обесценивает как саму облигацию, так и доходы от нее с течением времени. Доход 50 рублей, полученный через год, будет эквивалентен рублей сейчас, полученные еще через год 50 рублей будут эквивалентны рублей в современных ценах и так далее. Если считать доход от облигации без учета инфляции, то он будет расти до бесконечности, каждый год увеличиваясь на 50 рублей. С учетом же инфляции мы должны рассчитывать стоимость дохода, привязавшись к какому-то определенному моменту времени.Проведенные выше рассуждения имели привязку к текущему моменту времени и расчет дохода проводился исходя из текущей покупательной способности рубля. В итоге с учетом обесценивания денег бессрочный доход, получаемый с облигации в ценах текущего момента времени, будет даваться бесконечным числовым рядом . Запишем его в виде . Здесь постоянный множитель 50 в каждом слагаемом вынесен за знак ряда, а суммирование ряда начато не с , а с (чтобы привести его к ряду, составленному из членов геометрической прогрессии, начиная с единицы). Добавление члена ряда с скомпенсировано вычитанием единицы в скобках. Используя известную формулу для суммы геометрической прогрессии,

можем записать рублей. Именно такой доход в ценах сегодняшнего дня за бесконечный промежуток времени мы получим с одной облигации. Подобные задачи возникают при необходимости спрогнозировать и сравнить две стратегии инвестиций на будущее.