Тесты кафедры анатомии человека МГМСУ им. А.И. Евдокимова

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Заочно-вечерний факультет
Кафедра нефтегазового дела
Контрольная работа
по дисциплине Механика сплошной среды
Выполнил:
студент 4 курса
группы НДбз 13-2
Зверев Э.Э.
Проверил:
доцент Ламбин А.И.
Иркутск 2017 г
Задание
Рассмотрев два вектора, представленных через свои компоненты в прямоугольной декартовой системе координат:
a = 2e1 + e2 + e3;
b = 2e1 + 8e2 + 9e3, (номер зачетной книжки 13151589),
1. Вычислить скалярное, векторное и неопределенное произведения векторов a и b , а также вычислить угол между этими векторами. Для проверки результатов расчет угла следует провести двумя способами. Через формулу скалярного произведения векторов a и b и через формулу модуля векторного произведения этих векторов.
2. Определить диадик D, как векторное произведение вектора c = a b и диады ab .
3. Разложить диадик D на симметричную M и антисимметричную N части.
4. Вычислить вектор антисимметричного тензора.
5. Найти главные значения и направления главных осей тензора M. При этом кубическое уравнение контролируется значениями первого, второго и третьего инвариантов тензора M, а корни кубического уравнения так же проверяются через инварианты этого тензора.
Из полученных значений направляющих косинусов координатных осей составляется тензор преобразований A, который также необходимо проверить на удовлетворение условий ортогональности.
6. Матричным умножением тензоров второго ранга тензор M преобразовать к главным осям.
1. Вычислим произведение векторов
Используя свойства единичных векторов, вычисляем скалярное и векторное

произведения векторов a и b:
a • b = (2e1 + e2 + e3) • (2e1 + 8e2 + 9 e 3)=4 e 1 • e 1 + 8 e 2 • e 2 + 9 e 3 • e 3 = 21; c = a b = (2 e 1 + e 2 + e 3) (2 e 1 + 8 e 2 + 9 e 3) =
= 16(e 1 e 2) + 18(e 1 e3) + 2(e 2 e 1) + 9(e 2 e 3) + 2(e 3 e1) + 8(e 3 x e 2) = = 16 e 3 - 18 e 2 - 2 e 3 + 9 e 1 + 2 e 2 - 8 e 1 = e 1 - 16 e 2 + 14 e 3.
Модуль вектора «c» равен:
|c| = = 21,2838.
Векторное произведение проще вычислить через определитель:
c = a b =
Из формулы скалярного произведения векторов определяется косинус угла между векторами:
cos (ab) =
откуда ab = 81,9°.
Для проверки результата расчета вычислим этот угол с помощью формулы модуля векторного произведения векторов:
sin (ab) =
откуда ab = 45,38°.
Теперь вычисляем неопределенное произведение этих векторов:
ab = (21 + 2 + 3)(2 1 + 8 2 + 9 3) =
= 4 + 161 2 + 18 1 3 + 2 2 1 + 8 2 2 + 9 2 3 + 2 3 1 + 8 3 2 + 9 3 3

Матрица этого тензора второго ранга имеет вид:
2. Вычисление диадика
Вычисляем диадик D через векторное произведение вектора c и диады ab, необходимо учесть, что векторное произведение самого вектора на себя равно нулю = 0.
D = c ab = (- 16 2 + 14 3) (4 + 161 2 + 18 1 3 + 2 2 1 + 8 2 2 + 9 2 3 + 2 3 1 + 8 3 2 + 9 3 3) =
= 2(2) 1 + 8(1 2) 2 + 9(1 2) 3 +
+ 2(1 3) 1 + 8(1 x 3) 2 +9(1   3) 3 -
- 64(2) 1 - 256() - 288(1) 3 -
- 32(2 3) 1 - 128(2 3)2 -144(2 3) 3 +
+ 56(3 1) 1 + 224(3 1) 2 + 252(3 1) 3 +
+ 28(3 2) 1 + 112(3 2) 2 + 126(3 2) 3 =
= - 60 1 1 -240 1 2 -270 1 3 + 54 2 1 + 216 2 2 + 243 2 3 +
+ 66 3 1 +264 3 2 + 297 .

Это вычисление проще выполнить с помощью определителя:
D = c ab = (c a)b =21 + 8 2 + 93) =
= - 60 1 1 -240 1 2 - 270 1 3 + 54 2 1 + 216 2 2 + 243 2 +
+ 66 3 1 +264 3 2 + 297 3 3.
Матрица диадика D имеет вид:
3. Разложение диадика

Разлагается диадик D на симметричный M и антисимметричный N по формулам:
D = M + N = (D + Dc) +(D - Dc),
где Dc - сопряженный диадик, матрица которого имеет вид:
Разложение легче произвести матричным способом:
Согласно полученных матриц записать симметричный M и антисимметричный тензор N в линейной форме:
M = -60 - 93 1 2 -102 1 3 - 93 2 1 + 216 2 2 + 253,5 2 3 - 102 3 1 + 253,5 3 2 + 297 3 3.
N = -147 1 2 - 168 1 3 + 147 2 1 - 10,5 2 3 +
168 3 1 + 10,5 3 2.
4. Вычисление вектора диадика
Вектор диадика N получается, если все диады ортов заменить их векторными произведениями:
= -147(1 2) -168 3) + 147(2 1) - 10,5(2 3) + 168(3 1) + 10,5(3 2) =
= - 147 3 +168 2 - 147 3 - 10,51 +168 2 - 10,5 1=
= -21 1 + 336 2 -294 3.
5. Нахождение главных значений и направлений главных осей
Для получения кубического уравнения составляем определитель и приравниваем его нулю:
 = 0,
где - корни кубического уравнения.
Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение вида:
 3 - JI + JII - JIII = 0.
В нашем случае
 3 - 453 2 - 49943,25 = 0,   (1)
которое можно проверить, используя инварианты тензора M
JI = M11 + M22 + M33 = -60 + 216 + 297 = 453;
JII =
=
= (-12960 - 8649) +(64152-64262,25)+(-17820-10404)
= - 21609 - 110,25 - 28224 = - 49943,25;
J iii == - 60 • (216 • 297 - 253,5 • 253,5) + 93 • (-93 • 297 + 102 • 253,5) - 102 • (-93 • 253,5 - 102 • 216) = 0.
Решая уравнение (1) 3 - 453 2 - 49943,25 = 0,
  (2 - 453- 49943,25 = 0,
 = 0,
 2 - 453- 49943,25 = 0,
D = (-453)2 - 4 • (- 49943,25) = 404982
 =>
Получаем три корня, которые располагаем в порядке убывания.
 (1) = 544,691, (2) = 0, (3) = - 91,691,
которые являются главными значениями симметричного тензора M.
Правильность вычисления корней уравнения (1) также можно проверить с помощью инвариантов:

JI = (1) + (2) + (3) = 544,691-91,691 = 453,
JII = (1) (2) + (2) (3) + (3) (1) = - 91,691 • 544,691 = 49943,25,
JIII = (1) (2) (3) = 0.
диадик скалярный произведение
Используя значения корней, составляем систему трех линейных однородных уравнений для определения направляющих косинусов n1, n2, n3 для каждого главного направления.
При (1) = 544,691 система имеет вид
(2)
Так как определитель системы (2) равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, выраженных через параметр t. При отыскании параметра t будем требовать, чтобы выполнялось условие nini = t.
Для определения значений воспользуемся двумя последними уравнениями системы (2)
n1(1) =,
n2(1) = ,   (3)
n3(1) =   - 57101,98t,
где t =
Подставляя значения t в систему (3), получим значения направляющих косинусов для первого главного направления
n1(1) = ±0,2224, n2(1) = 0,6341,   n3(1) =0,7406.
При (2) = 0 система имеет вид
(4)
n1(2) =,
n2(2) = ,   (5)
n3(2) =   - 1543,5t,
где t =
Подставляя значения t в систему (5), получим значения направляющих косинусов для второго главного направления:
n1(2) = 0,0470, n2(2) = ±0,7517,   n3(2) = 0,6578.
При (3) = - 91,691 система имеет вид:
(6)
n1(3) =,
n2(3) = ,   (7)
n3(3) =   7808,98t,
где t =
Подставляя значения t в систему (7), получим значения направляющих косинусов для третьего главного направления
n1(3) = ±0,9738, = ±0,1811,   n3(3) = ±0,1374.
Тензор преобразования A для данного случая будет иметь следующий вид:
A =
При правильно выполненных расчетах тензор A соответствует условию ортогональности. Сумма квадратов компонентов любого столбца или строки должна

быть равна единице, сумма произведений компонент одинакового индекса двух столбцов или строк должна быть равна нулю.

0,0495

0,4021

0,5484

1,0000

0,0022

0,5651

0,4327

1,0000

0,9483

0,0328

0,0189

1,0000

1,0000

1,0000

1,0000

Все результирующие суммы по столбцам и строкам равны 1. Условие выполнено, следовательно тензор А вычислен верно.

6. Вычисление тензора М в главных осях

Для приведения тензора М к главным осям воспользуемся формулой матричного умножения:

M* = A · M · Ac ,

где M* - тензор М в главных осях

Ac - тензор, сопряженный с А.

=

=.

= ...