Тесты кафедры анатомии человека МГМСУ им. А.И. Евдокимова

Распространение плоских волн в анизотропных средах

Введение
Анизотропной называют среду, у которой параметры или или оба эти параметра сразу различны в различных направлениях. Такими свойствами обладает ионосфера (ионизированный газ в магнитном поле), феррит, помещенный в магнитное поле, и некоторые кристаллы. У анизотропных веществ диэлектрическая или магнитная проницаемость уже не скаляр, а тензор.
1. Тензор диэлектрической проницаемости ионизированного газа в магнитном поле

Диэлектрическую проницаемость ионизированного газа без магнитного поля мы рассчитали в предыдущем разделе (см. 3.56, 3.57). Если ионизированный газ поместить в магнитное поле, то его диэлектрическая проницаемость становится тензорной и газ ведет себя как анизотропная среда. Сначала рассмотрим влияние магнитного поля на тепловое движение электронов в отсутствие электромагнитной волны. Заряженная частица в постоянном магнитном поле движется под действием силы Лоренца
.
На движение электрона вдоль магнитной силовой линии магнитное поле не влияет. Сила Лоренца оказывается равной нулю, так как нулю равно векторное произведение. Если электрон движется перпендикулярно магнитным силовым линиям, то на него действует сила, перпендикулярная скорости и траектория движения электрона искривляется. При криволинейном движении сила Лоренца уравновешивается центробежной силой.
; . (4.1)
Если магнитное поле H0 постоянно, то радиус кривизны траектории электрона постоянен и электрон движется по окружности с временем обращения
, (4.2)
которому соответствует круговая частота
. (4.3)
Эту частоту называют частотой гиромагнитного резонанса, или ларморовской частотой.
Теперь рассмотрим движение электрона в постоянном магнитном поле при прохождении электромагнитной волны. Для этого в (3.53) добавим слагаемое описывающее воздействие магнитного поля на электрон
. (4.4)
Учтем, что в плоской волне электрическое поле и смещение электрона от положения равновесия изменяются по гармоническому закону, и перейдем от функции времени

к комплексным амплитудам.
. (4.5)
Введем единичные векторы в направлении постоянного магнитного поля и вектора поляризации и , умножим обе части равенства на eN/m и выразим коэффициенты в последнем уравнении через круговые частоты Н, 0 и вектор поляризации из (4.3, 3.55, 3.50)
; ; .
Тогда отдельные слагаемые в последнем равенстве примут вид:
; ;
; ,
а уравнение можно записать так:
.
Введем комплексную частоту .
Направим ось z вдоль постоянного магнитного поля и спроектируем уравнение на координатные оси.
;
;
.
Решим полученную систему уравнений относительно проекций вектора поляризации на координатные оси. Посчитаем, например . Для этого умножим первое уравнение на , а второе на iH и сложим их
=.;
. (4.6)
Проведя аналогичные расчеты, получим две других проекции вектора.
(4.7) . (4.8)
Введем обозначения
; ; . (4.9)
Тогда для проекций вектора поляризации можно написать
(4.10)
Вектор поляризации связан с диэлектрической восприимчивостью соотношением (3.51)
.
Воспользуемся этим соотношением и соотношением (4.10) для определения диэлектрической восприимчивости ионизированного газа в магнитном поле
(4.11)
Теперь рассчитаем диэлектрическую проницаемость, воспользовавшись (1.3.6) и (4.11)
= = (1 +)
и введем дополнительные обозначения
c2 = 1+c1 . (4.12)
Тогда тензор диэлектрической проницаемости можно записать в виде:
. (4.13)
Итак, диэлектрическая восприимчивость ионизированного газа, помещенного в

магнитное поле, описывается тензором второго ранга. Тензор антисимметричен. В отсутствие магнитного поля H = 0, b1 = 0 и недиагональные составляющие пропадают. Кроме того, все три элемента, находящиеся на диагонали, оказываются одинаковыми

.

Диэлектрическая проницаемость становится скаляром.

2. Тензор магнитной проницаемости феррита в магнитном поле

Ферриты это твердые керамические вещества, полученные высокотемпературном спеканием смеси окислов металлов. Они обладают магнитными свойствами ферромагнитного металла, и электрическими свойствами диэлектрика. Относительная магнитная проницаемость ферритов может достигать нескольких тысяч, а относительная диэлектрическая проницаемость нескольких десятков. Электрическая проводимость ферритов очень мала и поэтому затухание электромагнитных волн в них мало. Особые магнитные свойства ферритов, как и ферромагнитных металлов и сплавов связаны с тем, что в состав ферритов входят ионы, в электронных оболочках которых не все спиновые моменты электронов скомпенсированы. В результате ион обладает магнитным моментом, который и определяет магнитные свойства феррита. Строго эти свойства описывает квантовая механика, однако и классическая механика позволяет уяснить основные эффекты, возникающие в феррите, помещенном в магнитное поле.

С классической точки зрения, магнитный момент возникает потому, что движение электронов, входящих в состав атома, эквивалентно электрическому току, который и создает электрическое поле. Электроны, входящие в состав атома, вращаются вокруг ядра. Характеристикой состояния тела, находящегося во вращательном движении, служит момент импульса. Материальная точка, массой m, движущаяся по окружности радиусом r, с линейной скоростью v обладает импульсом и моментом импульса

.

Момент импульса направлен перпендикулярно плоскости орбиты. Если вращается заряженная частица, то возникает орбитальный магнитный момент. Магнитный момент однозначно связан с моментом импульса.

Уравнение движения магнитного момента можно получить, воспользовавшись уравнением для силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд.

Для того, чтобы преобразовать это выражение в соотношение для моментов, умножим векторно слева обе части равенства на и преобразуем правую часть.

(4.14)

Теперь для того, чтобы получить уравнение для магнитного момента, нужно преобразовать левую часть равенства. Слева стоит момент силы, который однозначно связан с моментом импульса, а тот, в свою очередь, с магнитным моментом. Воспользуемся вторым законом Ньютона

и преобразуем левую часть равенства

. (4.15)

Это действительно так, поскольку

.
Но первое слагаемое равно нулю, так как векторы и параллельны и их векторное произведение равно нулю. Заменим левую часть равенства (4.14) в соответствии с (4.15) и воспользуемся связью орбитального и магнитного моментов.
. (4.16)
Получено уравнение движения единичного магнитного момента в магнитном поле. Если в единице объема содержится N элементарных систем, то магнитный момент единицы объема или его намагниченность и уравнение движения для намагниченности:
.
При выводе уравнения не учитывалось взаимодействие магнитных моментов электронной оболочки с атомами решетки. При таком взаимодействии будет изменяться направление магнитного момента, а величина намагниченности уменьшаться. Будем считать, что это уменьшение пропорционально магнитному моменту. Тогда уравнение перепишется в виде:
. (4.17)
Итак, получено уравнение для намагниченности феррита в магнитном поле. Определив из этого уравнения, можно найти магнитную восприимчивость, а затем и магнитную проницаемость.
Пусть однородная бесконечная ферритовая среда помещена в постоянное магнитное поле , направленное вдоль оси z,. В ней распространяется плоская волна, напряженность магнитного поля в которой 1. Полное магнитное поле, воздействующее на вещество, можно определить, сложив их
.
Воспользовавшись (1.40) рассчитаем намагниченность феррита
.
Подставим это выражение в уравнение для движения магнитного момента, переписав его в комплексной форме. Учтем, что магнитный момент постоянного магнитного поля не изменяется и производная от него равна нулю. Кроме того вектора и , и попарно параллельны и векторные произведения [Ч] и [Ч] равны нулю. Тогда (4.17) перепишется в виде
. (4.18)
Спроектируем равенство (4.18) на координатные оси. Воспользуемся тем, что проекции векторного произведения произвольных векторов и можно найти, расписав по минорам первой строки определитель.
Тогда уравнение (4.18) перепишется в виде системы из трех уравнений для проекций
Здесь использовано обозначение e/m=e.
Для упрощения записи используем выражение для плазменной частоты
(4.19)
и введем обозначения:
(4.20)
. (4.21)
Тогда система уравнений будет выглядеть так:

Из последнего уравнения следует, что вдоль постоянного магнитного поля (ось z), магнитный момент отсутствует. Остальные проекции нетрудно найти из первых двух уравнений.
Введем обозначения :
; (4.22)
И запишем поперечные проекции через эти величины
(4.23)
(4.24)
Зависимость между напряженностью магнитного поля и намагниченностью линейная. Коэффициент пропорциональности - магнитная восприимчивость (см. 1.40). Как следует из (4.23, 4.24), в нашем случае магнитная восприимчивость - тензор второго ранга.
(4.25)
Введем комплексную относительную магнитную проницаемость
. (4.26)
и запишем выражение для нее, воспользовавшись (4.26).
. (4.27)
Итак, ионизированный газ и феррит ведут себя в магнитном поле аналогично. Но если для ионизированного газа тензором становится диэлектрическая проницаемость, то для феррита тензор - магнитная проницаемость. Оба тензора антисимметричны и очень похожи по структуре. Произведение входит в постоянную распространения, поэтому ее вид для этих двух сред очень похож.
3. Свойства анизотропных кристаллов
3.1 Описание кристаллов

Для описания идеального кристалла вводят пространственную решетку, описывающую расположение атомов кристалла. Свойства решетки зависят от размеров элементарной ячейки. У элементарной ячейки есть три ребра. Ребра элементарной ячейки параллельны кристаллографическим осям a, b и c, а их размеры - единичные отрезки вдоль этих осей обозначенные теми же буквами.
Кристаллические системы различаются по наклону кристаллографических осей друг к другу и по относительным размерам ребер элементарной ячейки, направленных вдоль этих осей.
Любая плоскость, проходящая через три точки с координатами (a/h, b/k, c/?), где h, k, ? -- целые числа (включая и нуль), может быть кристаллической гранью. Числа h, k, ?, заключают в скобки и называют индексами Мюллера. Они образуют символ кристаллографической плоскости. Индексы Мюллера могут быть положительными или отрицательными числами, включая и нуль. Отрицательный индекс обозначается чертой над цифрой. Например, плоскости (001) и (00) перпендикулярны оси c, расположены по разные стороны от начала координат и отсекают на осях отрезки c/?. Направление осей обозначается [001], [00] и т. д.
3.2 Диэлектрическая проницаемость анизотропных кристаллов

Кристаллы обладают различными физическими свойствами в различных направлениях. В частности, диэлектрическая проницаемость в общем случае представляет собой вещественный симметричный тензор второго ранга. Известно, что в этом случае можно так выбрать прямоугольную систему координат (x, y, z), что тензор будет иметь диагональный вид и его можно записать в виде матрицы
(4.28)
Этой матрице можно поставить в соответствие эллипсоид общего вида.
. (4.29)
Считая относительную магнитную восприимчивость равной единице, выразим коэффициенты преломления через ij и введем поляризационные константы aij.
. (4.30)
Тогда (4.29) можно записать через введенные в (4.30) величины.
. (4.31)
. (4.32)
Поверхность эллипсоида, описываемого выражением (4.31), называется оптической индекатриссой. Каждый радиус-вектор оптической индикатриссы равен показателю преломления для тех лучей, колебания электрического вектора которых совершаются в направлении этого радиус-вектора.
Эллипсоид в самом общем случае имеет два сечения в форме круга. Это означает равенство показателей преломления в кристалле по направлениям, лежащим в плоскости кругового сечения эллипсоида. Любая линия, перпендикулярная круговому сечению эллипсоида показателей преломления, называется оптической осью кристалла Оптическая ось - это не линия, а направление в кристалле. В общем случае кристалл двухосный. Если оптические оси сливаются, располагаясь вдоль большой оси эллипсоида, а два круговых сечения сливаются в одно, то кристалл называют одноосным. Различают кристаллы положительные и отрицательные: положительные кристаллы имеют вытянутые оптические индикатрисы, а отрицательные -- сплюснутые (рис.4.1).Показатели преломления, измеренные по координатным осям, совпадающим с кристаллографическими осями, называются главными показателями преломления. Если оптическая индикатриса кристалла расположена в координатной системе, оси которой x', y', z' не совпадают с осями оптической индикатрисы x, y, z (см. рис. 4.1«б»), то уравнения (4.29, 4.31, 4.32) можно преобразовать поворотом осей координат. Это приведет к возникновению слагаемых, содержащих произведение координат и в матрице диэлектрических проницаемостей (4.28) возникнут отличные от нуля недиагональные члены. Например, уравнение для поляризационных констант (4.32) примет следующий вид:
. (4.33)
Аналогичный вид принимают и два других уравнения (4.29, 4.31), однако все коэффициенты в этих уравнениях остаются действительными числами.

3.3 Воздействие электрического поля на кристалл

В ряде кристаллов наблюдается ярко выраженный электрооптический эффект, который состоит в изменении поляризационных констант и, соответственно, показателей преломления под воздействием электрического поля. При воздействии электрического поля эллипсоид показателей преломления кристалла изменяется. Изменения показателей преломления принято определять через изменения поляризационных констант

, (4.34)

где aij и - поляризационные константы без воздействия и при воздействии на кристалл внешнего электрического поля. При воздействии электрического поля на кристалл, оси эллипсоида показателей преломления которого не совпадают с координатными, уравнение его новой оптической индикатрисы можно получить из (4.33, 4.34):

(4.35)

Если оси эллипсоида перед воздействием электрического поля совпадали с координатными осями, то в уравнении (4.35) три последних слагаемых упростятся, поскольку a12 , a23 и a31 равны нулю, но недиагональные члены сохранятся.

. (4.36)

Это уравнение описывает влияние постоянного электрического поля на поляризационные константы в различных направлениях. Различают линейный (эффект Поккельса) и квадратичный (эффект Керра) электрооптические эффекты. При линейном электрооптическом эффекте изменение поляризационных констант пропорционально первой степени напряженности воздействующего электрического поля.

(4.37)

где i и j - номера координаты, x= l, y=2, z=3.

При квадратичном электрооптическом эффекте изменение поляризационных констант пропорционально квадрату напряженности воздействующего электрического поля или произведению напряженности полей, приложенных вдоль различных осей,

(4.38)Связь между изменением поляризационных констант aij, компонентами вектора электрического поля Ex, Ey, Ez и электрооптическими коэффициентами обычно задают в виде матрицы.

Число отличных от нуля электрооптических коэффициентов зависит от индивидуальных свойств кристалла и неодинаково для различных кристаллографических классов.

Например, для часто используемых кристаллов класса , KDP и ADP, отличны от нуля лишь три коэффициента r41, r52 и r63, причем r41 = r52. Для другого часто используемого кристалла класса 3m - ниобата лития - отличны от нуля коэффициенты r13 = r23, r42 = r51, r12 = -r22, r61 = -2r22,

Кроме электрооптического, в кристаллах наблюдается пьезооптический эффект (явление фотоупругости), заключающийся в изменении оптической индикатрисы кристаллов под влиянием внешних механических напряжений. Эти два эффекта в низкочастотном и высокочастотном электрическом поле проявляются по-разному. В низкочастотном поле деформация успевает за изменением электрического поля и кристалл можно считать механически свободным.

Линейный электрооптический эффект возможен только в не центрально симметричных кристаллах, в которых также наблюдается и пьезоэлектрический эффект. В таких механически свободных кристаллах, при воздействии электрического поля происходит изменение показателя преломления. В то же время вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта возникнет деформация. Эта деформация, в свою очередь, приводит к изменению показателей преломления в результате пьезоэлектрического эффекта. Таким образом, в статическом и низкочастотном электрическом поле наблюдается комбинированный электрооптический и пьезооптический эффект.

Изменение поляризационных констант под воздействием электрического поля, не связанное с обратным пьезоэлектрическим эффектом, называют первичным, или истинным электрооптическим эффектом. Он наблюдается в кристаллах с запрещенной деформацией. В таких случаях говорят, что кристалл механически зажат. Механическое зажатие наблюдается при проявлении электрооптического эффекта в быстро меняющемся электрическом поле.

Рассмотренные кристаллы называют негиротропными. Наряду с этим существуют гиротропные кристаллы. Под гиротропией понимают оптическую активность, заключающуюся во вращении плоскости поляризации линейно поляризованного света. У оптически активного кристалла тензор диэлектрической проницаемости или магнитной восприимчивости содержит мнимые недиагональные члены.

Существует естественная и наведенная оптическая активность. Естественная оптическая активность наблюдается в ряде кристаллов. Анализируя вид диэлектрической проницаемости ионизированного газа в магнитном поле (4.13) и магнитной проницаемости феррита в магнитном поле (4.27) замечаем, что обе эти величины имеют форму, необходимую для проявления оптической активности. Ионизированный газ и феррит в магнитном поле проявляют оптическую активность. Рассмотрим явления в этих средах.

4. Плоская волна в феррите, помещенном в магнитное поле

Свойства феррита, если он не помещен в магнитное поле, отличаются от свойств обычного диэлектрика тем, что у него магнитная проницаемость много больше единицы. Если феррит помещен в магнитное поле, то картина резко меняется. Теперь магнитная проницаемость - величина тензорная и полученные для скалярной магнитной проницаемости результаты использовать нельзя. Нужно снова вернуться к уравнениям Гельмгольца или Максвелла.

Рассмотрим безграничную ферритовую среду без потерь, помещенную в магнитное поле, направленное по оси z. Источники поля, токи и заряды, отсутствуют. В среде распространяется плоская волна и, следовательно, применим метод комплексных амплитуд. Воспользуемся уравнениями (2.1.4) для роторов полей, удалив из них токи магнитный поле волна кристалл

(4.39)

Будем искать решение этих уравнений для двух случаев, когда плоская волна распространяется вдоль магнитного поля и поперек него.

4.1 Распространение плоской волны вдоль направления внешнего постоянного магнитного поля

Плоская волна распространяется вдоль оси z, и по этой же оси направлено магнитное поле. Спроектируем уравнения (4.39) на координатные оси, учитывая, что магнитная проницаемость определяется выражением (4.27).
Тогда для проекций на координатные оси получим
Плоская волна распространяется вдоль оси z, поэтому по осям x и y ничего не меняется. Производные по переменным x и y равны нулю и система уравнений упростится.
;
;
.
Из двух последних уравнений следует, что по мере распространения плоской волны в феррите вдоль внешнего магнитного поля не возникает продольных составляющих и .
В систему дифференциальных уравнений входят лишь производные по z , а зависимость от z для всех проекций задается мнимой экспонентой. Поэтому система дифференциальных уравнений преобразуется в алгебраическую. Опускаем два последних уравнения для и , а оставшиеся четыре составят систему
(4.40)
Упростим (4.40). Для этого найдем Ex0 и Ey0 из второго и четвертого уравнения системы.
(4.41)
и подставим в оставшиеся два уравнения
(4.42)
Получена система из двух однородных уравнений. Система имеет решение, если ее определитель равен нулю. Запишем определитель системы и проведем элементарные преобразования. После упрощения получим следующее уравнение для постоянной распространения:
Это биквадратное уравнение имеет две пары корней.
Знак плюс в обоих выражениях соответствует прямой волне, а знак минус - обратной. В неограниченной ферритовой среде отраженная волна отсутствует и два отрицательных значения можно отбросить.
;
(4.43)
Исходная плоская волна, перемещаясь в феррите вдоль магнитного поля, распалась на две, каждая из которых распространяется со своей постоянной распространения + или -. Чтобы определить поляризацию этих волн, найдем связь между их проекциями на поперечные оси из первого уравнения (4.42), подставив в него сначала + , а затем -.
для +
для - (4.44)
Если заменить проекции магнитного поля на проекции электрического,

воспользовавшись (4.41), то получим
для +
для -
Плоская волна разделилась на две. В одной из них проекции на оси x и y сдвинуты на угол +/2, а в другой на -/2. Амплитуды обеих проекций одинаковы. Это характерно для волн с круговой поляризацией. Если сдвиг фазы на угол -/2, то вектор вращается против часовой стрелки, а если на +/2, по часовой.
Итак, исходная плоская волна с линейной поляризацией, проникая в феррит, разделяется на две с левосторонней и правосторонней круговой поляризацией. Каждой из этих волн соответствует своя постоянная распространения + или -. Электрическое и магнитное поле связаны между собой так же, как и в плоской волне (см. 4.41).
Выражения для постоянной распространения плоской волны в диэлектрике без потерь (3.37) и в феррите (4.43) полностью совпадут, если посчитать
. (4.45)
Феррит ведет себя как среда, обладающая различной магнитной проницаемостью для волн с лево- и правосторонней круговой поляризацией. Воспользуемся значениями b, и b из (4.22, 4.27).
.
и рассчитаем магнитную проницаемость
, (4.46)
. (4.47)
В общем случае магнитная проницаемость оказалась комплексной. Мнимая часть возникает из-за взаимодействия магнитного потока с атомами решетки. Если не учитывать это взаимодействие, то комплексная угловая частота в (4.46, 4.47) станет действительной и действительной станет магнитная проницаемость.

4.2 Эффект изменения параметров плоской волны, в зависимости от ее поляризации

Поскольку магнитная проницаемость различна для волн с лево- и правосторонней поляризацией, то различны и волновые числа. Если = 0, то
Различные волновые числа в свою очередь вызывают изменение других параметров плоской волны.
1. Длина волны
(4.50)
2. Волновое сопротивление
. (4.51)
3. Фазовая скорость
(4.52)
4. Групповая скорость определяется из выражения
У волн с волновыми числами + и - групповые скорости окажутся различными. В обоих случаях групповые скорости зависят от частоты.
Изменение параметров плоской волны используется для построения различных СВЧ устройств на основе феррита, помещенного в продольное магнитное поле. В

зависимости от того, каково соотношение частоты СВЧ поля и частоты гиромагнитного резонанса р, наблюдаются различные эффекты.
Низкочастотная область << р . Анизотропия свойств феррита пропадает.
Действительно, пренебрегая в знаменателе (4.46, 4.47) по сравнению с р, получим
Магнитная проницаемость одинакова для обеих круговых поляризаций и не зависит от частоты. Феррит ведет себя как изотропная среда.
Область гиромагнитного резонанса. р. Здесь нельзя не учитывать потери.
Действительно, пусть потери отсутствуют. Тогда на резонансе у - знаменатель обратится в нуль (см. 4.47), а сама магнитная проницаемость окажется бесконечной.
Однако на практике этого не происходит. Рост магнитной проницаемости - на резонансе ограничивается потерями. Введем
и перепишем выражения (4.46, 4.47) с учетом этих обозначений. Для левосторонней поляризации получим
 (4.53)
а для правосторонней
 (4.54)
где
Таким образом, магнитная проницаемости + в районе ферромагнитного резонанса постоянная действительная величина, не зависящая от частоты. Магнитная проницаемость _ в районе ферромагнитного резонанса сильно зависит от частоты и имеет комплексный характер. При =0 она максимальна и чисто мнимая. Это приводит к значительным потерям на резонансе. Действительно, рассчитаем постоянную распространения.
 (4.55)
На резонансе + особенностей не имеет, а - достигает максимальной величины.
Фазовый угол - равен 45°. Как и у металла, действительная и мнимая части постоянной распространения одинаковы по модулю. Одинаковы по модулю постоянная затухания и волновое число, что приводит к сильному затуханию для волн с правосторонней круговой поляризацией. Для волн с левосторонней круговой поляризацией этого эффекта нет и затухание практически отсутствует. Сильное затухание одной из круговых поляризаций на резонансе широко используется для построения вентилей.
Волновое сопротивление
различно для различных поляризаций. zc+ активно и не имеет особенностей, а zc- оказывается комплексным из-за комплексного характера магнитной проницаемости и сильно изменяется в районе резонанса. На частоте резонанса волновое сопротивления zc- максимально.
Фазовая скорость тоже различна для волн с различной поляризацией и определяется действительной частью постоянной распространения.
. (4.56)
При подходе к резонансу фазовая скорость волн с правосторонней поляризацией уменьшается и достигает минимума на резонансе.
Высокочастотная область. >>р, >>m. Частота гиромагнитного резонанса

пропорциональна магнитному полю р= 0еН и условие >>р означает, что анализ идет в области малых магнитных полей. Потери не будем учитывать, и для магнитных проницаемостей получим.

(4.57)

Обе магнитные проницаемости положительные величины, поэтому обе постоянные распространения - действительные числа и потерь не возникает у обеих поляризаций.

(4.58)

Длины волн

(4.59)

различны. Это используется в вентилях на смещении поля - устройствах, пропускающих СВЧ энергию в одном направлении и не пропускающем в другом. Фазовые скорости различны.

(4.60)

Это приводит к повороту плоскости поляризации линейно поляризованной волны по мере распространения ее в феррите. Покажем это. Пусть магнитное поле в исходной, плоской волне было направлено вдоль оси x. Представим его суммой двух волн

.

Первое слагаемое описывает волну с правой круговой поляризацией, а второе - с левой. По мере распространения вектор в первой волне поворачивается по, а во второй - против часовой стрелки, но угол поворота у них не одинаков и определяется волновыми числами + и -.

Если длина пути плоской волны в феррите d, то

Для круговой поляризации проекции магнитного поля на координатные оси одинаковы (см. 4.44). Найдем угол, на который повернется вектор , пройдя расстояние d в феррите.

.

На выходе из феррита, как и на входе, волна остается плоской, но ее магнитный вектор повернулся на угол

. (4.61)

Точно на такой же угол развернется и вектор электрического поля. Вектора и останутся взаимно ортогональными, а плоскость, в которой они расположены, по-прежнему перпендикулярна направлению распространения плоской волны.

Явление вращения плоскости поляризации при прохождении линейно поляризованной волны через продольно намагниченный феррит получило название эффекта Фарадея.

4.3. Распространение плоской волны поперек внешнего постоянного магнитного поля

Задача аналогична предыдущей, но изменяется геометрия (рис.4.2). Феррит намагнитим вдоль оси z, а плоскую волну направим вдоль оси x. Уравнения Максвелла (4.39) спроектируем на координатные оси, воспользовавшись тензором магнитной проницаемости (4.27).Учтем, что в плоской волне, распространяющейся вдоль оси x, оба поля зависят только от x и эта зависимость представляется в виде мнимой экспоненты. Тогда производные по координатам z и y равны нулю, а производную по x можно заменить умножением на -i. Система уравнений однородна, и в каждое слагаемое будет входить одна и та же мнимая экспонента. Сократим ее. Обозначим амплитудные значения индексом “0”. После этих преобразований система уравнений перепишется в следующем виде.

(4.62)

(4.63)

(4.64)

Для удобства отдельные уравнения системы перемещены так, чтобы получить три группы. Решение первой группы - уравнение (4.62) - очевидно x 0 = 0. По мере распространения плоской волны в феррите не возникает продольной составляющей электрического поля. Вторая система (4.63) описывает электромагнитную волну, содержащую поперечные составляющие поля y0 и z0. Ее свойства не отличаются от свойств обычной плоской волны, и она называется обыкновенной. Последняя группа (4.64) содержит три уравнения относительно неизвестных z0 , x0 и y0. Электрическое поле в ней ортогонально направлению распространения, а магнитное имеет и продольную x0, и поперечную y0 составляющие. Эта волна называется необыкновенной.

Решим систему (4.63).

Это однородная система. Запишем ее определитель и рассчитаем .

Постоянная распространения оказалась действительной. Если не учитывать отраженную волну, то

(4.65)

Система (4.63) описывает обыкновенную плоскую электромагнитную волну, магнитное поле которой направлено по внешнему магнитному полю. Эта волна “ощущает” диэлектрическую проницаемость феррита, но совершенно не чувствует его магнитных свойств. Магнитная проницаемость феррита для нее равна , как и в вакууме.

Чтобы рассчитать электромагнитное поле в необыкновенной волне, нужно решить систему (4.64)

Однородная система уравнений имеет решение только тогда, когда ее определитель равен нулю

Распишем определитель по минорам верхней строки

Если не учитывать отраженную волну, то

(4.66)

Итак, при прохождении плоской волны в феррите перпендикулярно внешнему магнитному полю линейно поляризованная волна разделяется на две. Одна из них обыкновенная с постоянной распространения . Вектора и в ней располагаются перпендикулярно направлению распространения, причем, магнитное поле этой волны будет направлено по внешнему магнитному полю. Вторая - необыкновенная, с постоянной распространения (4.66), электрическим полем, направленным вдоль внешнего магнитного поля, и двумя проекциями магнитного поля. Одна из них

направлена по направлению распространения, а другая - перпендикулярна ей и внешнему магнитному полю. Эффект возникновения необыкновенной волны в феррите получил название эффекта Коттона-Мутона. Комплексные амплитуды проекций магнитного поля связаны соотношением (см. первое уравнение 4.64)
Хотя они и сдвинуты по фазе на 900 , но не равны по величине и в общем случае необыкновенная волна имеет эллиптическую поляризацию. Лишь в частном случае, когда b = b эллиптическая поляризация вырождается в круговую.
5. Плоская волна в ионизированном газе, помещенном в магнитное поле

Анализ распространения плоской волны в ионизированном газе можно провести точно так же, как и в феррите. Проще всего результаты получить, воспользовавшись принципом перестановочной двойственности. Тензоры магнитной проницаемости феррита и диэлектрической проницаемости ионизированного газа имеют одинаковый вид. Поэтому дополнительно к замене на - нужно использовать замены b на - a2 , b на - b1.
5.1 Плоская волна в продольном магнитном поле

Постоянную распространения плоской волны в ионизированном газе, помещенном в продольное магнитное поле, получим из (4.43)

Воспользуемся выражениями (4.9, 4.12) для a2 и b1
;
и для входящих в последние два выражения плазменной круговой частоты (3.55) и круговой частоты гиромагнитного резонанса (4.3)
.
Рассчитаем постоянную распространения.
. (4.67)
Диэлектрическая проницаемость для волн с левой - и правой + поляризацией оказывается различной.
(4.68)
Не будем учитывать никакие потери, в том числе и на столкновения. Тогда постоянная затухания будет равна нулю, а круговая частота окажется действительной:
Рассмотрим параметры плоской волны
1. Рассчитаем длину волны. Для этого воспользуемся выражением (4.67) для постоянной распространения.
. (4.69)
Длина волны различна для волн с левосторонней и правосторонней круговой поляризацией. С увеличением внешнего магнитного поля + увеличивается, а - уменьшается. Если внешнее магнитное поле отсутствует, то н = 0 и + = -.
2. Рассчитаем волновое сопротивление.
(4.70)
По мере нарастания магнитного поля zc+ растет а zc- уменьшается и разность между

волновыми сопротивлениями нарастает.
3. Фазовая скорость.
 (4.71)
Она различна для волн с различной круговой поляризацией. Поэтому все эффекты, которые возникали в феррите, будут присутствовать и в ионизированном газе. Здесь тоже будет наблюдаться гиромагнитный резонанс, а в более слабых магнитных полях эффект вращения плоскости поляризации линейно поляризованной плоской волны (эффект Фарадея).
5.2 Распространение плоской волны поперек внешнего постоянного магнитного поля

В поперечном магнитном поле в ионизированном газе, как и в феррите, следует ожидать возникновения обыкновенной и необыкновенной волны. Так и происходит. Воспользуемся принципом перестановочной двойственности для того, чтобы из (4.65 и 4.66) получить постоянные распространения для этого случая.
. (4.72)
Воспользовавшись этим видом постоянных распространения можно получить выражения для длины волны, волнового сопротивления и фазовой скорости электромагнитной волны. Все эффекты, возникающие в феррите, существуют и в ионизированном газе.
Поведение плоских волн в ионизированном газе интересно еще и тем, что при связи с внеземными объектами радиоволны проходят через ионосферу, которая состоит из частично ионизированного газа, помещенного в магнитное поле Земли. Магнитное поле Земли мало и p<< . Радиоволны распространяются под некоторым углом к магнитному полю. Вектор Пойнтинга можно разложить на две составляющие - одна по магнитному полю, а другая перпендикулярна ему. В результате возникает обыкновенная и необыкновенная волна и поляризация обоих волн изменяется по сложному закону.
6. Плоская волна в анизотропном кристалле, помещенном в электрическое поле
Свойства плоской волны в анизотропном кристалле принято описывать с помощью уравнения оптической индикатрисы (4.35 или 4.36), в котором приращение поляризационных констант выражается с помощью матрицы электрооптических коэффициентов. Для линейного электрооптического эффекта используется выражение (4.37), а для квадратичного (4.38).
Рассмотрим линейный электрооптический эффект в кристаллах класса , для которых отличны от нуля только три электрооптических коэффициента, r41 = r52 и r63. Пусть оси эллипсоида показателей преломления совпадают с координатными осями. Уравнение (4.36) в этом случае будет выглядеть так
Под действием электрического поля оси нового эллипсоида поляризационных констант в общем случае не совпадают с координатными осями x, y, z. Эллипсоид превращается в двуосный. Если электрическое поле действует только по оси z, то уравнение упрощается:
. (4.73)
Оси нового эллипсоида теперь не совпадают с осями старого в плоскости xoy. Новые

главные поляризационные константы можно вычислить, если привести уравнение эллипса к главным осям x1 и y1 . Для этого положим z = 0 и повернем координатные оси x и y так, чтобы в новой координатной системе с осями x1 и y1 отсутствовало произведение координат. При повороте осей старые координаты точки x, y можно определить через новые:
Подставим эти выражения в (4.73)
Приравняем коэффициент при x1y1 нулю и учтем, что электрическое поле слабо искажает исходный эллипс, то есть r63Ez<< a11, a22.
Подставим полученные для тригонометрических функций значения в (4.74)
Пренебрегаем всеми слагаемыми, содержащими (r63Ez)2
(4.75)
Новые поляризационные константы принимают значения
(4.76)
а коэффициенты преломления вдоль главных осей
(4.77)
(4.78)
Меняя напряженность электрического поля вдоль оси z, можно управлять величиной коэффициентов преломления вдоль осей x и y, причем, если сначала коэффициенты преломления были одинаковы, то после того, как будет приложено электрическое поле, они станут различными. Разница тем больше, чем больше электрическое поле.
Задачи и упражнения
1. Две плоские линейно поляризованные волны распространяются вдоль оси x в монокристалле корунда, для которого
= .
Частоты колебаний у них одинаковы и равны 10 ГГц. Определите разность фаз этих волн, возникающую при прохождении 1см пути, если электрический вектор в первой волне ориентирован вдоль оси y, а во второй - вдоль оси x.
2. Плоская волна падает из воздуха на поверхность корунда из воздуха по направлению нормали, расположенной по оси y. Диэлектрическая проницаемость корунда задана в предыдущей задаче. Граница раздела воздух - твердое тело параллельна оси z. Найдите коэффициенты отражения для волн, поляризованных вдоль оси x и вдоль z на частоте 10 ГГц.
3. Безграничный ферритовый образец с намагниченностью насыщения Ms =3,5104 А/м помещен в подмагничивающее поле напряженностью 9104А/м. Относительная диэлектрическая проницаемость феррита =10. В феррите распространяется линейно поляризованная плоская волна с круговой частотой = 1,51010с-1. Вычислите угол поворота плоскости поляризации при прохождении плоской волной расстояния 5см вдоль подмагничивающего поля. Заряд электрона е=1,610-19к, его масса m = 8,110-31кг.
4. Плоская электромагнитная волна с частотой 7,4 ГГц и с линейной поляризацией распространяется вдоль постоянного подмагничивающего поля в толщине однородного феррита с намагниченностью насыщения Ms = 5104А/м и относительной диэлектрической проницаемостью = 16. Найдите напряженность

намагничивающего поля, если известно, что при прохождении участка длиной 6 сантиметров плоскость поляризации повернулась на 1200.