Мосиянова Е. И.
МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по курсу: Сопротивление материалов
``РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ''
(рам и балок)
Рецензент Селиванов М. И.
Утверждено на заседании методического семинара
кафедры 27/ IX - 85 г.
Утверждено на заседании методической
комиссии филиала 25/ X - 85 г.
Калуга 1985
Введение
Статически неопределимыми называются такие системы , для которых определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи метода сечений и уравнений равновесия.
Для простоты пояснений рассмотрим только те случаи, когда конструкция, и силы, действующие на неё, лежат в одной плоскости.
Существует три типа плоских статически неопределимых систем: стержневые системы с шарнирно связанными элементами ; рамы и балки.
Системы первого типа в настоящем пособии не рассматриваются.
Рамой называется кинематически неизменяемая стержневая система, элементы которой жёстко связаны в узлах .
иногда в конструкцию рамы шарниры, но их введение не нарушает общей кинематической неизменяемости системы.
В рамах статическая неопределимость возникает: вследствие особенностей конструкции (наличие замкнутых контуров) - внутренняя статическая неопределимость; при наличии замкнутых контуров и «лишних» (>3) внешних связей.
Балкой называется брус, работающий преимущественно на изгиб, причем длина его несоизмеримо больше двух других размеров, характеризующих поперечное сечение.
У балок статическая неопределимость является следствием постановки дополнительных опор, обеспечивающих большую жёсткость системы. Такие балки принято называть неразрезными.
Для рам и балок применим общий порядок раскрытия статической неопределимости.
неопределимая статическая система эквивалент
 устанавливают степень статической неопределимости системы (число «лишних», с точки зрения статики, неизвестных).
 получают основную и эквивалентную системы.

составляют канонические уравнения метода сил и решают.
проверяют правильность полученного решения .
расчёт по этой схеме носит название «метода сил», поскольку в качестве «лишних» неизвестных выбирают усилия, действующие по направлению отброшенных связей.
1. Степень статической неопределимости системы
1.1 Статическая неопределимость рам
Количество «лишних» связей в рамах определяется по формуле :
где
К - число замкнутых контуров, каждый из которых имеет три неизвестных внутренних усилия (М - изгибающий момент, Q - поперечную силу, N - продольную силу) (рис. 3) R - число реакций внешних связей, 3 - число линейно независимых уравнений равновесия для плоской системы сил, n - число шарниров, Si - число стержней, сходящихся в одном шарнире.
Л=3 4+(5-3) - 1 (4-1) =11
Таким образом, рама 11 раз статически неопределима.
1.2 Статическая неопределимость балок
Балка замкнутых контуров не имеет и для неё количество лишних неизвестных определяется по упрощённой формуле
, S=2
Число внешних связей для рассматриваемой балки (R) равно 5 (три в опоре А и по одной на опорах В и С). В пролёте ВС имеется шарнир D, снимающий одну связь.
Тогда Л=5-3-1=1
Балка один раз статически неопределима.
Расчётная схема для такой балки представлена на рис. 5,б.
Дадим некоторые пояснения.
Так как изгибающий момент в шарнире равен 0,то через точку D могут передаваться только вертикальные усилия.
Следовательно, балка АС может быть представлена в виде системе, состоящей из двух балок: балки АВ и балки DC, которая в точке D опирается на балку АВ .
опора D балки DC является не подвижной шаровой опорой статически определимой балки DC. Реакции VD, HD и VD могут быть найдены с помощью уравнений статики, причём HD = 0. Балка АВ, являясь один раз статически неопределимой, оказывается, в свою очередь, нагруженной внешними силами и реакцией VD, приложенной в точке D.
2. Основная система; эквивалентная система
Основной системой называется статически определимая система, полученная из заданной путём отбрасывания «лишних» связей.
Эквивалентной называется система, полученная, путём загружения основной системы заданными внешними силами и специально подобранными реакциями отброшенных связей, обеспечивающая такие же перемещения, как и заданной системе. Это достигается за счёт приравнивания к нулю перемещений точек приложения «лишних» связей по направлениям этих связей. ;
D1(P1 ; P2 ; ... X1 ; X2 ; ...) = 0 , т.е.

перемещение точки наложения первой связи по направлению этой связи от действия внешних сил (P1 ; P2 ;) и реакций «лишних» связей (X1 ; X2; ...) отсутствует.
Число таких уравнений равно числу таких отброшенных «лишних» связей. статика неопределимая система балка

2.1 Основная и эквивалентная система для рам

При выборе основной системы для рам необходимо помнить, что статическая определимость является необходимым, но недостаточным признаком правильно выбранной основной системы.
Для неё можно предложить множество вариантов систем.
Основная система выбрана правильно, если она обеспечивает кинематическую неизменяемость вновь полученной рамы и не включает в себя дополнительных связей, отсутствующих в заданной системе. Необходимо отметить, что недопустимо также и использование мгновенно кинематически изменяемых систем.
Связи, наложенные на систему допускают поворот рамы относительно точки А на малый угол. При этом реакция в опоре В достигает бесконечности. Для рассматриваемой рамы и предложенных основных систем эквивалентные системы будут выглядеть следующим образом.
Наиболее рациональным будет вариант «в» при котором часть неизвестных окажутся равными нулю. Более подробно об этом будет сказано при разборе примеров.

2.2 Основная и эквивалентная системы для балок

При выборе основной системы для балок возможны два подхода. В одних случаях за «лишние» неизвестные целесообразно принимать вертикальные составляющие опорных реакций. Тогда основной системой будет статически определимая балка значительной длины, а эквивалентной - эта же балка, нагруженная внешними силами и специально подобранными усилиями X , обеспечивающими отсутствие вертикальных смещений на опорах В и С.
В других случаях в качестве «лишних» неизвестных целесообразно взять надопорные изгибающие моменты.
В этом случае основной системой будет ряд последовательно стоящих статически определимых балок, а эквивалентной - эти же балки нагруженные внешними нагрузками и надопорными моментами, выполняющими функции неизвестных усилий. Величина моментов должна быть подобрана так, чтобы не было разрыва сплошности балки и углы поворота концевых сечений одной балки относительно другой отсутствовали.

3. Составление канонических уравнений метода сил и их решение

3.1 Основные положения сопротивления материалов, используемые при расчёте рам и балок

3.1.1 Принцип неизменяемости начальных размеров

Рассматриваемые конструкции рам и балок являются достаточно жёсткими, а материал, из которого они изготовлены, достаточно упругим. Нагрузки, действующие на конструкцию, не вызывают в её элементах пластических деформаций. Все деформации происходят в пределах упругости, перемещения (как линейные, так и угловые) настолько малы, что форма и размеры конструкции практически не изменяются. Это позволяет использовать для расчётов постоянную схему, сохраняющую свою первоначальную форму и размеры. Такой подход открывает широкие возможности для применения принципа независимости действия сил.

3.1.2 Принцип независимости и сложения действия сил

Так как конструкция работает в пределах упругости, то конечный результат силового воздействия не зависит от порядка приложения сил.

Применительно к случаю статически неопределимых рам и балок это означает следующее: если на раму (балка) действует группа внешних сил, то внутренние усилия, в интересующем сечении, или смещения, в интересующем направлении, могут быть вычислены от каждой силы отдельно, а результаты просуммированы.

Так, например, при определении суммарного изгибающего момента в сечении балки можно построить отдельно эпюры от «m» и «P», а результаты сложить. В случае необходимости можно поступить и наоборот: «расслоить» сложную эпюру (на участке BC) на более простые.

Всякая внешняя нагрузка может быть представлена в виде произведения I*P или I*m, где I имеет точку приложения и направление действия, а сомножитель P определяет абсолютное значение силы (или момента). Аналогично может быть представлено любое известное или неизвестное усилие X, т.е. X=1*X . Приём расслоения эпюр используется и при определении перемещений, возникающих вследствие действия внешних сил. Перемещения принято обозначать Dik и dik, где первый индекс (i) обозначает точку и направление перемещения, а второй (k) указывает на силу, послужившую причиной перемещения. Так для схемы нагружения, представленной на рис.11, перемещение в точке A по направлению силы «P» будем считать первым направлением, а саму силу P - первой силой; момент «m», приложенный в точке B - второй силой.

Тогда перемещение (прогиб) в точке A будет:

или

где d11 - перемещение по направлению первой силы действия первой силы, равной 1,

d12 - перемещение по направлению первой силы от действия второй силы, равной 1.

или

Соответственно, угол поворота сечения в точке B будет равен:

или

или

3.1.3 Взаимность перемещений

Перемещение точки приложения первой силы по направлению первой силы, вызванное второй силой, равно перемещению точки приложения второй силой, если силы между собой равны, т.е. d12=d21

Так, в рассмотренном выше примере,

, а

, т.е. d12=d21

Таким образом, если найден коэффициент d12, то нет необходимости вычислять коэффициент d21, и при решении задач можно сократить объём вычислений.
3.2 Канонические уравнения метода сил
Используя всё выше изложенное, можно приступить к составлению уравнений, описывающих особенности работы статически неопределимых рам и балок.
Эта рама трижды статически неопределима. Наиболее рациональным вариантом эквивалентной системы будет вариант. Заданная конструкция рамы предполагает, что перемещения в точке В (защемлены) по всем трём направлениям (1,2,3) отсутствуют, т.е. D1=0; D2=0; D3=0.
В развёрнутом виде это может быть записано следующим образом:
Полученная система уравнений носит название системы канонических уравнений метода сил. Для её решения необходимо построить эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки (грузовая эпюра) и единичных усилий (X1=1; X2=1; X3=1;) и пользуясь методом Мора вычислить коэффициенты канонических уравнений (если возможно воспользоваться способом Верещагина)
или
г
В рассматриваемом примере:
При определении коэффициентов необходимо помнить следующее:
Коэффициенты, имеющие двойные одинаковые индексы (d11; d22; d33; dii; и т.д.), называются главными. Они вычисляются умножением эпюр от единичных нагрузок самих на себя. Эти коэффициенты всегда положительны.
Коэффициенты имеющие разные индексы (d12; d31; d23; dij; и т.д.), называются побочными. Они вычисляются умножением эпюр от разных единичных сил друг на друга и могут быть положительными, отрицательными, нулевыми. Коэффициенты: d12; d31; d23; и т.д. - попарно равны между собой dij = dji(на основании теоремы о взаимности перемещений).
Грузовые коэффициенты (D1p; D2p; и т.д.) вычисляются умножением грузовой эпюры соответствующую единичную. При вычислении грузовых коэффициентов площади всегда берутся с криволинейной эпюры, а ордината под её центром тяжести - с линейной. Эти коэффициенты могут быть: положительными, отрицательными, нулевыми.
Найденные значения коэффициентов необходимо подставить в систему уравнений и решить последнюю.
Задача считается решённой, если найдены значения всех неизвестных и построена суммарная эпюра изгибающих моментов. построение суммарной эпюры может быть выполнено двумя способами.
При первом способе построения основную систему нагружают внешними нагрузками и найденными значениями неизвестных усилий. Если в результате решения системы уравнений, оказалось, что какое-то из неизвестных имеет знак минус (в нашем случае X2= -3p/64), то при нагружении этим усилием основной системы необходимо изменить его направление на противоположное. Дальнейшее построение эпюры изгибающих моментов выполняется по общим правилам, т.е. для каждого участка

рамы записываются уравнения изгибающих моментов и производятся соответствующие подсчёты.
Рама, имеет три участка, для которых могут быть записаны следующие уравнения:
При другом способе построения, эпюра MS , построенных от действительных значений X1;X2 и т.д., найденных при решении системы уравнений, и грузовой эпюры. Суммирование производится по точкам.
Найденные значения соответствуют вычисленным ранее при построении суммарной эпюры первым способом.
Известно, что перемещение по направлению действия связи должно отсутствовать. Это условие и используется при проверке.
Для исследуемой рамы выбирают новую основную систему и нагружают её единичной нагрузкой, действующей по направлению одной из отброшенных связей. От действия этой нагрузки строят единичную эпюру. Эту эпюру по правилу Верещагина перемножают с эпюрой M, результат перемножения должен дать 0.
В ряде случаев непосредственное вычисление площадей элементов суммарной эпюры и определение их центров тяжести бывает затруднительно.
Поэтому перемножение суммарной эпюры на единичную можно заменить перемножением составляющих суммарной эпюры (рис. 12,в,ж) на единичную (рис. 13,в) с последующим суммированием результатов.
Угол поворота сечения в точке A оказался равным нулю, что соответствует действительности, т.к. углы поворота защемлениях отсутствуют.
Пример I. Для рамы, изображённой на фиг. 14,а требуется раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эпюру изгибающих моментов. Моменты инерции стоек рамы и её горизонтального элемента (ригеля) различны и показаны на чертеже. Число неизвестных опорных реакций, рассматриваемой рамы, равно пяти, так что две из них являются «лишними».
Основная и эквивалентная системы, а так же эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от лишних неизвестных X1 и X2 = 1 показаны на фиг. 14,б,в,г,д,е.
Канонические уравнения метода сил имеют вид:
Коэффициенты этих уравнений вычислим по формуле Верещагина:
Подставим найденные значения коэффициентов в систему канонических уравнений и решим последнюю.
Если принять:
После этого одним из выше указанных методов строим суммарную эпюру изгибающих моментов.
Пример II. Для рамы изображённой на фиг.16,а, требуется раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эпюру изгибающих моментов.
Число неизвестных опорных реакций рассматриваемой рамы равно четырём, так что одна из них является лишней.
Основная и эквивалентная системы, эпюры от заданных нагрузок и эпюра от X1 =1 показаны на фиг.16,б,в,г,д,е.
Каноническое уравнение метода сил имеет вид:
или

Коэффициенты будем определять по правилу Верещагина.
Пример 3. Дана статически неопределимая рама симметричной конструкции с симметричным нагружением.
Необходимо построить суммарную эпюру изгибающих моментов проверить правильность решения.
Эта рама три раза статически неопределима.
В качестве лишних неизвестных выступают внутренние силовые факторы на оси симметрии:
изгибающий момент X1,
продольная сила X2,
поперечная сила X3.
Относительно оси симметрии X1 и X2 являются симметричными нагрузками; X 3 - кососимметричной нагрузкой.
Составим систему канонических уравнений
и построим соответствующие эпюры изгибающих моментов от единичных сил и внешних нагрузок.
При подсчётах получается, что
.
Таким образом, за счёт рационального выбора основной системы, система канонических уравнений значительно упростилась. Это позволяет сформулировать следующие правило:
если система симметрична и для её расчёта выбрана симметричная основная система, то при действии симметричной нагрузки кососимметричные неизвестные обращаются в нуль.
Перестраиваем эпюры от X1 и X2 и строим суммарную эпюру.
Проверяем правильность полученного решения.
Если задача решена верно, то угол поворота на опоре B должен отсутствовать.
Выбираем новую основную систему для чего отбрасываем на опоре B три «лишних» связи: горизонтальную и вертикальную составляющие реакции и реактивный момент. Заменяем действие одной из отброшенных связей (в нашем примере - момента) единичной нагрузкой и строим эпюру изгибающих моментов от действия этой нагрузки
Определяем угол поворота на опоре B
следовательно задача решена верно.
Пример 5.
Дана статически неопределимая рама симметричной конструкции с произвольными нагружением.
Построить эпюру изгибающих моментов, возникающих в элементах рамы.
Эта рама трижды статически неопределима. Данная задача имеет два варианта решения. По первому варианту исходная задача может быть разбита на две более простых решения которых будут аналогичны приведённым в предыдущих примерах.
Схема решения по второму варианту приведена на.
В этом случае система трёх уравнений с тремя неизвестными имеет ряд нулевых

коэффициентов (d21=d12=0, d13=d31=0) и значительно упрощается:
Решая систему уравнений получаем:
Проверка подтверждает правильность полученного решения.
ия.
Известно, что угол поворота сечения в заделке равен 0. Определим этот угол поворота в сечении А балки АВ. Для этого выберем новую основную систему и нагрузим её единичным усилием, действующим по направлению отброшенной связи.
б
Эпюра изгибающих моментов от этого усилия. Перемножим по правилу верещагина эпюры.
Пример 2.
Дана один раз статически не определимая балка. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюру изгибающих моментов, если жёсткость балки EJx= Const.
Считаем правую опору «лишней» и заменяем её действие силой Х1. Система, эквивалентная заданной.
Составим каноническое уравнение метода сил.
Строим эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки и силы =1 определяем коэффициенты канонического уравнения.
а
Строим суммарную эпюру поперечных сил и изгибающих моментов.
б
Строим эпюру поперечных сил.
Как уже говорилось ранее при выборе основной системы для балки за «лишние» неизвестные можно принять не только реакции «лишних» опор, но и надопорные изгибающие моменты.
Рассмотрим многопролётную статически неопределимую балку рис. 25, имеющую К опор.
Для упрощения анализа считаем жёсткость по всей длине балки постоянной EJx= Const.
Чтобы построить суммарную эпюру изгибающих моментов, необходимо раскрыть статическую неопределимость. В качестве «лишних» неизвестных принимаем надопорные моменты. Тогда основной системой будет ряд самостоятельных статически определимых балок, нагруженных внешними нагрузками и неизвестными надопорными моментами.
Рассмотрим перемещение на опоре n. Им будет угол поворота над опорного сечения. Угол поворота сечения над опорой n балки длиной ln относительно сечения над опорой n балки длиной ln+1 должен отсутствовать, т. е. равен нулю.
В противном случае нарушается условие неразрывности, т. к. Конец одного пролёта является началом следующего пролёта.
Каноническое уравнение для опоры может быть записано в следующем виде:
Определим коэффициенты этого уравнения, для чего строим эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок и моментов М1, М2,……,Мк, равна 1.

Из анализа эти эпюру следует, что все единичные коэффициенты от: dn,1 до dn,n-2 и от dn,n+2 до dn,k - равны нулю; грузовой коэффициент будет состоять только из двух слагаемых: D'n,p на участке ln и D'' n,p на участке ln+1 - остальные обращаются в 0. (Dn,p= D'n,p+ D''n,p).
Таким образом, вид канонического уравнения значительно упрощается:
По общему правилу определяем коэффициенты полученного уравнения:
 - реакции на опорах (n-1) и (n+1) от момента Mn=1
n - горизонтальная проекция отрезка, соединяющего правую опору пролёта ln с центром тяжести грузовой эпюры в этом пролёте,
bn+1 - горизонтальная проекция отрезка, соединяющего правую опору пролёта ln+1 с центром тяжести грузовой эпюры в этом пролёте.
Выполнив все подстановки получаем:
В уравнение входят три момента на трёх соседних опорах, поэтому оно носит название «уравнение трёх моментов».
Для балки, построить эпюру изгибающих моментов. При решении задачи придерживаемся следующего порядка:
Устанавливаем степень статической неопределимости; заданная система один раз статически неопределима.
Получаем основную, а затем эквивалентную системы. Для этого врезаем над опорами шарниры и прикладываем в них моменты.
Строим эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок, действующих в пролётах.
Записываем уравнение 3-х моментов применительно к рассматриваемой задаче.
Анализируем уравнение и решение его.
Опоры А и С являются концевыми шарнирными опорами. Изгибающий момент (внутренний силовой фактор) над такими опорами равен нулю, если нет внешних нагрузочных моментов.
Следовательно:
MA=MC=0
Согласно общим положениям правила Верещагина
в
 т. е.
г
д
е
т. к. на втором пролёте нет внешних нагрузок. Окончательно уравнение примет вид:
ж
Построение суммарной эпюры изгибающих моментов.
Суммарная эпюра изгибающих моментов может быть построена двумя способами: графическим суммированием, непосредственным построением. Использование графического суммирования более удобно, если грузовые эпюры линейны (как в нашем случае).
Порядок построения в этом случае следующий.

Сначала строим эпюры изгибающих моментов от найденного значения МВ на эпюру изгибающих моментов от внешних нагрузок. Перестраиваем -получаем окончательную суммарную эпюру.
При втором способе построения рассматриваются две самостоятельные балки АВ и ВС. Балка АВ нагружена внешней нагрузкой и момент МВ=. От их действия вычисляются опорные реакции и по общему правилу строится эпюра изгибающих моментов. Аналогично решается балка ВС.
Раскрыть статическую неопределимость. Построить суммарную эпюр у изгибающих моментов.
Для решения задачи вводим фиктивный пролёт СА и далее поступаем по общему правилу: врезаем над опорами шарниры, прикладываем в них моменты и нагружаем балки внешними нагрузками.
в
Записываем уравнение трёх моментов:
г
Опора С является фиктивной опорой, поэтому момент на ней равен нулю: Мс=0
Пролёт СА является фиктивным пролётом в реальной балке он отсутствует, поэтому lСА=lф=0.
Опора В разделяет пролёт lАВ и консоль.
Момент возникающий над опорой, создаётся нагрузкой действующей на консоли.
Таким образом
Т. к. пролёт СА является фиктивным, то и выражение для него отсутствует, т. е.
=0
для определения величины строим эпюру изгибающих моментов от действия силы Р в пролёте АВ.
Окончательно получаем:
а
Суммарную эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки (МР), нагрузки на консоли (МВ) и моментов в заделке (МА), получаем суммарную эпюру изгибающих моментов.
б
Балка АВ, представлена на рис. 28, является симметричной как по конструкции, так и по нагружению. Она дважды статически неопределима, т. к. горизонтальные составляющие опорных реакций на опорах А и В равны нулю.
в
Решение задачи значительно упрощается, если использовать свойство симметрии. Разрежем балку по оси симметрии и в месте разреза приложим внутренние силовые факторы Мх=Х1 и Qy=X2 (N=X3, как уже говорилось ранее, равно 0).
Поперечная сила Qy(или Х2)согласно свойству симметрии, равна нулю.
Таким образом единственным неизвестным является изгибающий момент Мх=Х1.
Далее решаем задачу по общему правилу.
Суммарная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 28, в.
а

Балка АВ, представленная на рис. 29, симметрична по конструкции, но кососимметрично по нагрузкам.
Она дважды статически неопределимая, т. к. горизонтальные составляющие опорных реакций равны нулю.
б
Для упрощения решения используем свойство косой симметрии. Разрежем балку по оси симметрии и в месте разреза приложим неизвестные усилия X1; X2; X3; X3=0 (из условия)
X2=0 (из свойства косой симметрии.)
в
Таким образом единственным неизвестным будет поперечная сила X2.
Далее решаем задачу по общему правилу:
Литература
Феодосьев В. И. Сопротивление материалов Москва, Наука, 1979 год, число стр.-560...